

Bsp.: löse $\left\{ \begin{matrix} \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} \vec{x} \end{matrix} \right\}$

EW: $\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ -5 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 34 - 10\lambda + \lambda^2 \stackrel{!}{=} 0$

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = 5 \pm 3i$

$\lambda_1 = 5+3i$: $\begin{matrix} -1-3i & 2 \\ -5 & 1-3i \end{matrix} \xrightarrow{\text{(E.W.)}} \begin{matrix} -1-3i & 2 \\ 0 & 0 \end{matrix} \xrightarrow{\text{i.B.}} v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1+3i \end{pmatrix} \rightsquigarrow v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-3i \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1+3i \end{pmatrix} e^{(5+3i)t} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1-3i \end{pmatrix} e^{(5-3i)t}$

(Es gilt: $\bullet e^{\alpha+i\beta} = e^{\alpha} (\cos \beta + i \sin \beta)$)

- $\bullet \cos(-\beta) = \cos \beta$
- $\bullet \sin(-\beta) = -\sin \beta$

$[c_1, c_2 \in \mathbb{C} !]$
bel.

$\hookrightarrow \vec{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1+3i \end{pmatrix} e^{5t} (\cos 3t + i \sin 3t) + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1-3i \end{pmatrix} e^{5t} (\cos 3t - i \sin 3t)$

$= \underbrace{c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t} \cos 3t} + \underbrace{c_1 i \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} e^{5t} \cos 3t} + \underbrace{c_1 i \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t} \sin 3t} - \underbrace{c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} e^{5t} \sin 3t}$
 $+ \underbrace{c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t} \cos 3t} - \underbrace{c_2 i \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} e^{5t} \cos 3t} - \underbrace{c_2 i \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t} \sin 3t} - \underbrace{c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} e^{5t} \sin 3t}$

$= (c_1 + c_2) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t} \cos 3t - (c_1 + c_2) \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} e^{5t} \sin 3t$

$+ i(c_1 - c_2) \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} e^{5t} \cos 3t + i(c_1 - c_2) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t} \sin 3t$

$= \underbrace{(c_1 + c_2)}_{\hat{c}_1} \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t} \cos 3t - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} e^{5t} \sin 3t \right]$

$+ \underbrace{i(c_1 - c_2)}_{\hat{c}_2} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} e^{5t} \cos 3t + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t} \sin 3t \right]$

nicht jedes mal berechnen!!

sondern gleich so anschreiben!!

$[\hat{c}_1, \hat{c}_2 \in \mathbb{R}]$
bel.

$= \hat{c}_1 \cdot \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t} \cos 3t - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} e^{5t} \sin 3t \right] + \hat{c}_2 \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} e^{5t} \cos 3t + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t} \sin 3t \right]$

$\uparrow$
 $\text{Re}(v_1)$

$\uparrow$
 i^2

$\uparrow$
 $\text{Im}(v_1)$

$\uparrow$
 $\text{Im}(v_1)$

$\uparrow$
 $\text{Re}(v_1)$