Taylorreihen

$\boxed{\text{B}}$ Um wurzelfreie Näherungen für die Werte $\frac{1}{\sqrt{3}}$ und $\frac{1}{\sqrt{5}}$ berechnen zu können, soll die Funktion $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ im Entwicklungspunkt $x = 4$ in eine Taylorreihe entwickelt und damit Formeln für die gesuchten Näherungen angegeben werden.
Funktionieren diese Formeln auch noch für $\frac{1}{\sqrt{2}}$ bzw. $\frac{1}{\sqrt{7}}$?

1. Da die Angabe einer „allgemeinen“ Formel durch Ableiten eher schwierig ist, empfiehlt sich die Verwendung einer „bekannten“ Reihe:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} x^k \qquad \text{mit } x_0 = 0.$$

2. Da weder die Funktion selbst noch der Entwicklungspunkt direkt übereinstimmen, ist zunächst etwas „Handarbeit“ erforderlich:

$$f(x) \text{ mit } x_0 = 4 \quad \overset{x=z+4}{\Longleftrightarrow} \quad f(z+4) \text{ mit } z_0 = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{z+4}} = \frac{1}{\sqrt{4+z}} = \frac{1}{2\sqrt{1+\frac{z}{4}}}$$

3. Für den rechten Term ist die Formel der Binomialreihe (1.) bereits anwendbar:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{z}{4}}} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} \left(\frac{z}{4}\right)^k$$

Mit $\binom{-1/2}{0} = 1$ und $\binom{-1/2}{k} = \frac{-1/2}{1} \cdot \frac{-3/2}{2} \cdot \frac{-5/2}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{1/2-k}{k}$

folgt das Ergebnis

$$\frac{1}{\sqrt{z+4}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(\frac{z}{4}\right) + \frac{3}{16}\left(\frac{z}{4}\right)^2 - \frac{5}{32}\left(\frac{z}{4}\right)^3 + \frac{35}{256}\left(\frac{z}{4}\right)^4 \pm \ldots$$

4. Rückeinsetzen ($z = x - 4$):

$$\underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{x}} = \sum_{k=0}^{\infty} \overbrace{\frac{1}{2}\binom{-1/2}{k}\frac{1}{4^k}}^{a_k} \Big(x-4\Big)^k}}$$

5. Gesuchte Näherungen:

$$f(3) \approx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2}\binom{-1/2}{k}\frac{1}{4^k}\Big(-1\Big)^k = \frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{3}{256} + \frac{5}{2048} + \frac{35}{65536} \ldots \doteq 0.5772$$

$$f(5) \approx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2}\binom{-1/2}{k}\frac{1}{4^k}\Big(\ 1\ \Big)^k = \frac{1}{2} - \frac{1}{16} + \frac{3}{256} - \frac{5}{2048} + \frac{35}{65536} \ldots \doteq 0.4473$$

6. Zur Frage, ob die Formeln auch noch für „entferntere“ Werte von x anwendbar sind, benötigt man die Kenntnis des *Konvergenzradius* ρ der Potenzreihe aus (4.):

$$\rho = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{2}\binom{-1/2}{k}\frac{1}{4^k}}{\frac{1}{2}\binom{-1/2}{k+1}\frac{1}{4^{k+1}}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\cancel{\frac{1}{2}}\binom{-1/2}{k}\frac{1}{\cancel{4^k}}}{\cancel{\frac{1}{2}}\binom{-1/2}{k}\cdot\frac{-1/2-k}{k+1}\cdot\frac{1}{4\cdot\cancel{4^k}}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{4(k+1)}{-1/2-k}\right| = 4$$

Die Reihe konvergiert für Werte von $(x-4)$ zwischen -4 und 4 und somit für Werte von x zwischen 0 und 8. Sie ist damit auch noch zur Berechnung von $f(2)$ und $f(7)$ einsetzbar, jedoch nicht mehr für z.B. $f(9)$