**Taylorreihen**

$\boxed{\text{B}}$ Man bestimme die Taylorreihe zur Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

in $x_0 = 2$ bis zu Termen 2. Ordnung.

1. Der Versuch eines Ansatzes mit Koeffizientenvergleich

   $$\frac{1}{x} = A_0 + A_1(x-2) + A_2(x-2)^2$$

   scheitert hier, wenn man nach Potenzen von $x$ zu vergleichen versucht, da die Funktion für $x = 0$ nicht definiert ist:

   $$\begin{aligned} 1 &= A_0x + A_1(x-2)x + A_2(x^2-4x+4)x \\ 1 &= A_0x + A_1x^2 - 2A_1x + A_2x^3 - 4A_2x^2 + 4A_2x \\ 1 &\overset{\lightning}{=} (A_0 - 2A_1 + 4A_2)x + (A_1 - 4A_2)x^2 + A_2x^3 \end{aligned}$$

2. Dennoch läßt sich das Bsp. mittels Koeffizientenvergleich lösen, und zwar indem nicht nach Potenzen von $x$ sondern nach Potenzen von $x-2$ verglichen wird.
   Dazu ist es erforderlich, den Term $x$ geeignet durch Potenzen von $x-2$ darzustellen[1]:

   $$\boxed{x = x - 2 + 2 = (x-2) + 2}$$

   $$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= A_0 + A_1(x-2) + A_2(x-2)^2 \\ 1 &= \left[A_0 + A_1(x-2) + A_2(x-2)^2\right] \cdot x \\ 1 &= \left[A_0 + A_1(x-2) + A_2(x-2)^2\right] \cdot [(x-2)+2] \\ 1 &= \left[A_0 + A_1(x-2) + A_2(x-2)^2\right] \cdot (x-2) + \left[A_0 + A_1(x-2) + A_2(x-2)^2\right] \cdot 2 \\ 1 &= A_0(x-2) + A_1(x-2)^2 + \text{T.h.O.} + 2A_0 + 2A_1(x-2) + 2A_2(x-2)^2 \\ 1 &= 2A_0 + (A_0 + 2A_1)(x-2) + (A_1 + 2A_2)(x-2)^2 \end{aligned}$$

   $$\begin{array}{ccccccc} 2A_0 & & & & & = & 1 \\ A_0 & + & 2A_1 & & & = & 0 \\ & & A_1 & + & 2A_2 & = & 0 \end{array}$$

   $$\Rightarrow \quad A_0 = \frac{1}{2} \qquad A_1 = -\frac{1}{4} \qquad A_2 = \frac{1}{8}$$

   $$\underline{\underline{T_2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{8}(x-2)^2}}$$

3. Dazu noch die Probe nach der „herkömmlichen“ Methode:

   $$\begin{array}{rclcrcl} f(x) &=& \frac{1}{x} & \qquad & f(2) &=& \frac{1}{2} \\ f'(x) &=& -\frac{1}{x^2} & & f'(2) &=& -\frac{1}{4} \\ f''(x) &=& \frac{2}{x^3} & & f''(2) &=& \frac{1}{4} \end{array}$$

   Eingesetzt in die Taylorformel liefert dies exakt das obige Ergebnis.

[1] Dies entspricht im Grunde auch einer Taylorentwicklung im Punkt $x = 2$