

Taylorreihen

B Man bestimme die Taylorreihe zur Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x^3 - x + 1}$$

um $x_0 = 0$ bis zu Termen 4. Ordnung.

Bem.: Eine Taylorreihe mit Entwicklungspunkt 0 nennt man auch *McLaurin-Reihe*!

- Bestimmung der Ableitungen von $f(x)$ bis zur gewünschten Ordnung:

$$f(x) = \frac{1}{x^3 - x + 1}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{(x^3 - x + 1)^2} (3x^2 - 1) = \frac{1 - 3x^2}{(x^3 - x + 1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(x^3 - x + 1)^2 (-6x) - 2(x^3 - x + 1)(3x^2 - 1)(1 - 3x^2)}{(x^3 - x + 1)^4} = \frac{12x^4 - 6x^2 - 6x + 2}{(x^3 - x + 1)^3}$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= \frac{(x^3 - x + 1)^3 (48x^3 - 12x - 6) - 3(x^3 - x + 1)(12x^4 - 6x^2 - 6x + 2)}{(x^3 - x + 1)^6} \\ &= \frac{-60x^6 + 30x^4 + 96x^3 - 24x^2 - 24x}{(x^3 - x + 1)^4} \end{aligned}$$

$$f^{IV}(x) = \frac{(x^3 - x + 1)(-360x^5 + 120x^3 + 288x^2 - 48x - 24) - 4(-60x^6 + 30x^4 + 96x^3 - 24x^2 - 24x)}{(x^3 - x + 1)^8}$$

Bem.: Es kann darauf verzichtet werden, die letzte benötigte Ableitung zu vereinfachen.

- Einsetzen des Entwicklungspunkts:

$$f(0) = 1 \quad f'(0) = 1 \quad f''(0) = 2 \quad f'''(0) = 0 \quad f^{IV}(0) = -24$$

- Einsetzen der Werte liefert die fertige Taylorreihe:

$$T_4(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{-24}{4!}x^4 = \underline{\underline{1 + x + x^2 - x^4}}$$

Bem.: die Terme $(x - x_0)^n$ werden hier wegen $x_0 = 0$ zu x^n

B Man entwickle die Funktion

$$f(x) = \ln(\sin x)$$

im Punkt $x_0 = \frac{\pi}{2}$ in eine Taylorreihe (3 nicht verschwindende Terme).

- Berechnung der Ableitungen der Funktion sowie der Funktionswerte im Entwicklungspunkt:

$$f(x) = \ln(\sin x) \qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sin x} \cos x = \frac{\cos x}{\sin x} \qquad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$f''(x) = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x} \qquad f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2 \cos x}{\sin^3 x} \qquad f'''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$f^{\text{IV}}(x) = \frac{\sin^3 x \cdot (-2 \sin x) - 3 \sin^2 x \cos x \cdot 2 \cos x}{\sin^6 x} = \frac{-2 \sin^2 x - 6 \cos^2 x}{\sin^4 x} = \frac{4 \sin^2 x - 6}{\sin^4 x}$$

$$f^{\text{IV}}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$$

$$f^{\text{V}}(x) = \frac{\sin^4 x \cdot 8 \sin x \cos x - 4 \sin^3 x \cos x (4 \sin^2 x - 6)}{\sin^8 x} = \frac{-8 \sin^2 x \cos x + 24 \cos x}{\sin^5 x}$$

$$f^{\text{V}}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$f^{\text{VI}}(x) = \frac{\sin^5 x (-16 \sin x \cos^2 x + 8 \sin^3 x - 24 \sin x) - 5 \sin^4 x \cos x (-8 \sin^2 x \cos x + 24 \cos x)}{\sin^{10} x}$$

$$f^{\text{VI}}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -16$$

2. Einsetzen in die Taylorformel:

$$\begin{aligned} T_6(x) &= 0 + \frac{0}{1!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{-1}{2!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{0}{3!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 + \frac{-2}{4!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4 + \frac{0}{5!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^5 - \frac{16}{6!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^6 \\ &= \underline{\underline{-\frac{1}{2} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{1}{12} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4 - \frac{1}{45} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^6}} \end{aligned}$$

Manchmal empfiehlt es sich, zur Berechnung der Taylorreihe etwas geschickter vorzugehen, als gleich alle Ableitungen der Funktion zu bestimmen!

B Man bestimme die McLaurin-Reihe der Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{\cos x}$$

bis zu Termen der Ordnung 4.

1. Die Ableitungen werden rasch sehr kompliziert. Man kann die Funktion allerdings als Produkt anschreiben und die Taylorentwicklung nur auf einen Teil anwenden:

$$f(x) = (x^3 + 1) \cdot \frac{1}{\cos x}, \quad \text{setze} \quad \frac{1}{\cos x} = g(x)$$

$$g(x) = \frac{1}{\cos x}$$

$$g'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$g''(x) = \frac{\cos^2 x \cos x + 2 \cos x \sin^2 x}{\cos^4 x} = \frac{2 - \cos^2 x}{\cos^3 x}$$

$$g'''(x) = \frac{\cos^3 x (2 \cos x \sin x) + 3 \cos^2 x \sin x (2 - \cos^2 x)}{\cos^6 x} = \frac{(6 - \cos^2 x) \sin x}{\cos^4 x}$$

$$g^{\text{IV}}(x) = \frac{\cos^4 x (2 \cos x \sin^2 x + 6 \cos x - \cos^3 x) + 4 \cos^3 x \sin x (6 - \cos^2 x) \sin x}{\cos^8 x}$$

2. Einsetzen des Entwicklungspunkts:

$$g(0) = 1 \qquad g'(0) = 0 \qquad g''(0) = 1 \qquad g'''(0) = 0 \qquad g^{\text{IV}}(0) = 5$$

3. Taylorreihe zur Funktion $g(x)$:

$$G_4(x) = 1 + 0x + \frac{1}{2!}x^2 + 0x^3 + \frac{5}{4!}x^4 = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4$$

4. Einsetzen und ausmultiplizieren von $f(x) = (x^3 - 1)G(x)$:

$$T_4(x) = (x^3 - 1) \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 \right) = \underline{\underline{-1 - \frac{1}{2}x^2 + x^3 - \frac{5}{24}x^4}}$$

B Man bestimme die Taylorreihe der Funktion

$$y(x) = \frac{\sin x^2}{x^2}$$

um den Wert $x = 0$.

1. Die Funktion ist für $x = 0$ ein unbestimmter Ausdruck „ $\frac{0}{0}$ “, zur Bestimmung des Funktionswertes und der Ableitungen wären also die Regeln von *De L'Hospital* anzuwenden! Man kann das Bsp. einfacher durch Verwendung der (bekannten) Sinus-Reihe lösen:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \pm \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

2. Einsetzen von x^2 anstelle z in diese Formel:

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} \pm \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{4k+2}}{(2k+1)!}$$

3. Division der ganzen Reihe durch x^2 :

Bem.: Dies funktioniert nur, wenn nachher keine negativen Potenzen von x auftreten!

$$\frac{\sin x^2}{x^2} = 1 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^8}{5!} \pm \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{4k}}{(2k+1)!}$$

Eine weitere Möglichkeit bietet der *Ansatz* der Taylorreihe als $T(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + \dots$ und anschließender Koeffizientenvergleich:

B Man bestimme die Taylorreihe der Funktion

$$y(x) = \frac{x^2}{x - 4}$$

nach Potenzen von $x + 1$ bis zu Termen 3. Ordnung.

1. Ansatz:

$$\frac{x^2}{x - 4} = A_0 + A_1(x + 1) + A_2(x + 1)^2 + A_3(x + 1)^3$$

2. Ausmultiplizieren:

$$x^2 = A_0(x - 4) + A_1(x + 1)(x - 4) + A_2(x^2 + 2x + 1)(x - 4) + A_3(x^3 + 3x^2 + 3x + 1)(x - 4)$$

$$= A_0(x - 4) + A_1(x^2 - 3x - 4) + A_2(x^3 - 2x^2 - 7x - 4) + A_3(x^4 - x^3 - 9x^2 - 11x - 4)$$

3. Koeffizientenvergleich:

$$\text{konst.:} \quad 0 = -4A_0 - 4A_1 - 4A_2 - 4A_3$$

$$x: \quad 0 = A_0 - 3A_1 - 7A_2 - 11A_3$$

$$x^2: \quad 1 = A_1 - 2A_2 - 9A_3$$

$$x^3: \quad 0 = A_2 - A_3 \quad \Rightarrow A_0 = -\frac{3}{16}, A_1 = \frac{5}{16}, A_2 = A_3 = -\frac{1}{16}$$

4. Einsetzen im Ansatz:

$$T_3(x) = \underline{\underline{-\frac{3}{16} + \frac{5}{16}(x + 1) - \frac{1}{16}(x + 1)^2 - \frac{1}{16}(x + 1)^3}}$$

Bem.: Die beste Übereinstimmung ergibt sich hier bei $x = 0$ anstatt bei $x = -1$!

Mitunter sind beim Herleiten der Taylorreihe zwei Taylorreihen zu multiplizieren. Dabei kann viel Arbeit gespart werden, wenn man Terme höherer (als gewünschter) Ordnung gleich vernachlässigt.

B Man bestimme die McLaurin-Reihe zu

$$y = \frac{\ln(x+1)}{x^2+1}$$

bis zu Termen der Ordnung 7.

1. Verwendung bekannter Reihen:

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \dots$$

$$\frac{1}{1+z} = (1+z)^{-1} = \dots = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 \pm \dots$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 \pm \dots$$

2. Einsetzen und ausmultiplizieren:

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7}\right) (1 - x^2 + x^4 - x^6) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{7}x^7 \\ &\quad - x^3 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^5 + \frac{1}{4}x^6 - \frac{1}{5}x^7 \\ &\quad + x^5 - \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{3}x^7 \\ &\quad - x^7 \end{aligned}$$

3. Zusammenfassen:

$$T_7(x) = x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{13}{15}x^5 - \frac{5}{12}x^6 - \frac{76}{105}x^7$$

B Gesucht ist die Taylorreihe bis zur 3. Potenz um $x_0 = 0$ zur Funktion

$$f(x) = \sin[\ln(x+1)]$$

1. Verwendung bekannter Reihen:

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \pm \dots$$

$$\sin z = z - \frac{1}{3!}z^3 \pm \dots$$

2. Einsetzen der ersten Reihe in die zweite:

$$T_3(x) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \pm \dots\right) - \frac{1}{3!} \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \pm \dots\right)^3 \pm \dots$$

Nebenrechnung:

$$\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \pm \dots\right)^3 = \left(x - \frac{x^2}{2} \dots\right) \left(x - \frac{x^2}{2} \dots\right)^2 = \left(x - \frac{x^2}{2} \dots\right) \left(x^2 - 2x \frac{x^2}{2} \dots\right) = x^3 \pm \dots$$

3. Zusammenfassen:

$$T_3(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3!}x^3 = x - \frac{x^2}{2} + \underline{\underline{\frac{x^3}{6}}}$$