

Beispiele zum Satz von Stokes

1. Berechnen Sie

$$I = \iint_S \langle \operatorname{rot} \vec{V}, \vec{n} \rangle dA$$

wobei $\vec{V} = (x^2 + z, x - y, yz)^t$ sei, weiters S eine Fläche darstellt, die von den beiden Kurven

$$C_1: y = 4 - x^2, -2 \leq x \leq 2, z = 0 \quad (\text{Parabel in der } x, y\text{-Ebene})$$

$$C_2: z = 4 - x^2, -2 \leq x \leq 2, y = 0 \quad (\text{Parabel in der } x, z\text{-Ebene})$$

berandet wird und $\vec{n}$ der normierte Normalvektor auf S ist.

Lösung:

Nach dem Satz von Stokes gilt

$$\iint_S \langle \vec{V}, \vec{n} \rangle dA = \oint V_1 dx + V_2 dy + V_3 dz$$

also:

$$I = \oint (x^2 + z) dx + (x - y) dy + yz dz$$

Wie die berandete Fläche im Detail aussieht, ist dabei nicht von Belang. Für den ersten Teilweg gilt:

- $-2 \leq x \leq 2$
- $y = 4 - x^2$ und damit $\frac{dy}{dx} = -2x$ bzw. $dy = -2x dx$.
- $z = 0$ und damit $\frac{dz}{dx} = 0$ bzw. $dz = 0 \cdot dx$

Als Integral ergibt sich also:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-2}^2 (x^2 + 0) dx + (x - (4 - x^2))(-2x) dx + 0 dx \\ &= \int_{-2}^2 (x^2 - 2x^2 + 8x - 2x^3) dx = -\frac{16}{3} \end{aligned}$$

Analoge Rechnung liefert für den 2. Teilweg (achtung auf umgekehrte Richtung!):

$$I_2 = \int_2^{-2} (x^2 + (4 - x^2)) dx + 0 dx - 0 \cdot 2x dx = \int_2^{-2} 4 dx = -16$$

Die Summe $I_1 + I_2$ ergibt den Wert des geschlossenen Randes um das Gebiet und damit den gesuchten Wert des Integrals

$$I = -\frac{64}{3}.$$

2. Berechnen Sie

$$I = \iint_S \langle \operatorname{rot} \vec{V}, \vec{n} \rangle dA$$

wobei $\vec{V} = (z, -z, y)^t$ ein Vektorfeld darstellt, S eine durch folgende Kurve C berandete Fläche ist

$$x = 2 \cos t$$

$$y = 2 \sin t$$

$$z = \sin t \cos t$$

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

und $\vec{n}$ in jedem Punkt den normierten Normalvektor auf die Fläche S darstellt.

Lösung: Anwendung des Satzes von Stokes liefert das Integral

$$I = \oint_C z dx - z dy + y dz$$

Aus der gegebenen Kurve ermittelt man durch Ableiten nach t

$$dx = -2 \sin t dt, dy = 2 \cos t dt,$$

$$dz = (\cos^2 t - \sin^2 t) dt = (2 \cos^2 t - 1) dt.$$

Ins Integral eingesetzt ergibt das:

$$I = \int_{t=0}^{2\pi} \sin t \cos t \cdot (-2 \sin t) dt - \sin t \cos t \cdot 2 \cos t dt + \dots$$

$$\dots + 2 \sin t \cdot (2 \cos^2 t - 1) dt = \dots = 0.$$

Man beachte, daß sich als Integral hier der Wert 0 ergibt, obwohl $\operatorname{rot}(\vec{V}) = (2, 1, 0)^t \neq \vec{0}$