

Beispiele für Raumintegrale

3. Berechnen Sie das Volumen des Bereichs, der durch folgende Flächen begrenzt wird:

$$x^2 = 2y \quad y = 2 \quad z = 4 - x \quad z = 2y - 1$$

Die Einschränkungen für x und y ergeben sich aus den ersten beiden Gleichungen. Diese liefern Schnittpunkte für $y = \frac{x^2}{2} = 2$. Damit ergeben sich die x -Koordinaten der Schnittpunkte (und damit die Grenzen in x -Richtung) mit $x = \pm 2$. y kann in dem so beschränkten Bereich nur Werte zwischen 0 und 2 annehmen. 2 ist also die obere Grenze! Nun ist in diesem Bereich $4 - x$ immer größer als $2y - 1$. Das Gesamtvolumen errechnet sich als Differenz aus dem Volumen unter der „oberen“ und der „unteren“ Begrenzungsfläche:

$$V = \int_{x=-2}^2 \int_{y=\frac{x^2}{2}}^2 [(4-x) - (2y-1)] dy dx = \dots = \frac{16}{5}$$

4. Bestimmen Sie das Volumen des Raumes, der von den beiden Flächen $z = x^2$ und $z = 9 - y^2$ begrenzt wird.

Die erste Fläche ist eine nach oben geöffnete parabolische „Rinne“; die zweite, etwas höher angeordnet, parabolisch nach unten geöffnet. Die beiden Flächen umschließen einen Bereich, vergleichbar mit zwei Händen, die einen Schneeball formen. Die Schnittkurve zwischen den beiden Flächen erhalten wir durch Gleichsetzen der beiden Gleichungen:

$$z = x^2 = 9 - y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 9 \text{ (Kreisgleichung mit Radius 3.)}$$

Wir interessieren uns nur für den Bereich innerhalb dieser Kreislinie, da der äußere Bereich unbeschränkt ist. Wie schon gezeigt wurde, darf hier x nur Werte zwischen -3 und 3 annehmen, und y davon abhängig nur Werte zwischen $-\sqrt{9-x^2}$ und $\sqrt{9-x^2}$.

Einen bel. Punkt innerhalb dieses Bereiches (z.B. $P = (0,0)$) in die Angabe eingesetzt ergibt, daß die erste z -Funktion die untere und die zweite Funktion die obere Grenzfläche des Bereichs darstellt. Damit erhalten wir das Integral (wobei wir wieder Symmetrien ausnützen):

$$V = 4 \int_{x=0}^3 \int_{y=0}^{\sqrt{9-x^2}} (9 - y^2 - x^2) dy dx = \dots = \frac{81\pi}{2}$$

Auch hier ergibt sich einfacher in Polarkoordinaten: (Bereich ist der Kreis mit Radius 3)

$$V = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^3 (9 - r^2) r dr d\varphi$$