Beispiele für Raumintegrale

1. Berechnen Sie das Volumen des folgenden Bereichs:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \leq 1, \qquad x, y, z \geq 0$$

Auflösen nach z:

$$0 \leq z \leq c\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)$$

Zunächst die Grenze der Variable x: Damit z positiv bleibt, darf x niemals größer als a werden. $\Rightarrow 0 \leq x \leq a$
Wie sieht es nun für y aus, wenn wir x bereits gewählt haben? z wiederum positiv $\Rightarrow 0 \leq y \leq b(1 - \frac{x}{a})$
Somit wären die Grenzen des Bereichs festgelegt, als Integral ergibt sich:

$$V = c \int_{x=0}^{a} \int_{y=0}^{b(1-\frac{x}{a})} \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) \, dy \, dx = \ldots = \frac{abc}{6}$$

Beachten Sie, daß bei der Festlegung der Grenzen das y noch vom x abhängig war, das y-Integral also innerhalb des x-Integrals stehen muß!

2. Berechnen Sie das durch $z^2 + x^4y^2 + x^2y^4 = 4x^2y^2$ eingeschlossene Volumen.

Formal ergibt sich: $z = \pm|x||y|\sqrt{4 - x^2 - y^2}$ Beträge sind lästig. Wir erkennen aber Symmetrie in allen Variablen und können uns somit auf den positiven Oktanten (d.h. x,y,z positiv) beschränken und dann das Resultat mit 8 multiplizieren (Verdopplung in jeder Koordinatenrichtung).
Grenzen: Der Ausdruck unter der Wurzel darf nicht negativ werden!
Zunächst x : (vgl. oben) $\Rightarrow x \leq 2$
Entsprechend $y :\Rightarrow y \leq \sqrt{4 - x^2}$

$$V = 8 \int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{\sqrt{4-x^2}} xy\sqrt{4 - x^2 - y^2} \, dy \, dx = \ldots = \frac{256}{15}$$

Dasselbe als Variante in Polarkoordinaten: Die Forderung der Existenz der Wurzel liefert:
$x^2 + y^2 \leq 4$, d.i. der Kreis mit Radius 2. Wenn wir uns wiederum auf den positiven Oktanten beschränken, laufen die Variablen wie folgt:
$0 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Mit $dy\,dx = r\,dr\,d\varphi$ ergibt sich also:

$$V = 8 \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{2} r^3 \cos\varphi \, \sin\varphi \, \sqrt{4 - r^2} \, dr \, d\varphi$$