4. Übungsblatt

Richtungsableitung

1. Berechnen Sie den Gradienten der Funktion

$$w(x, y) = x^3 + 6xy + y^3$$

im Punkt $P = (1, 2)$ sowie die Richtungsableitung in Richtung $\vec{a} = (2, -1)^t$

Vektoranalysis

2. Man prüfe, ob folgende Kraftfelder durch Gradientenbildung entstanden sind und bestimme gegebenenfalls ihre Potentiale:

$$(a) \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} y\sqrt{1+z^2} \\ x\sqrt{1+z^2} \\ \frac{xy}{\sqrt{1+z^2}} \end{pmatrix}$$

3. Man stelle fest, ob die folgenden Kraftfelder quellen- bzw. wirbelfrei sind:

$$(a) \begin{pmatrix} x - y \\ y + z \\ x + z \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} z^3 \\ xy^2 \\ x^2z \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{pmatrix}$$

4. Bei einer Diffusion sei der Stofftransport durch den Vektor
- $\vec{a} = (x^3, x^2y, x^2z)^t$
- gegeben. Welche Menge
- M_0
- strömt je Zeiteinheit aus dem Zylinder
- $x^2 + y^2 = a^2, 0 \leq z \leq b$
- ?

5. Welches der Kurvenintegrale ist vom Weg unabhängig?

$$(a) \int_C [\sin x \, dx + \cos y \, dy] \quad (b) \int_C [(ye^x + xe^x) \, dx + xe^x \, dy]$$

6. Bei einem idealen Gas ist die Wärmezufuhr bei einer Volumen- und Temperaturänderung durch $dQ = nc_v dT + \frac{nRT}{V} dV$ gegeben. Das Gas soll vom Zustand T_A und V_A in einen Zustand T_B und V_B übergeführt werden, u.z.:

- (a) Zuerst soll bei konstantem V_A die Temperatur auf den neuen Wert T_B gebracht werden und anschließend bei konstanter Temperatur das Volumen verändert werden.
- (b) Zuerst soll bei konstantem T_A das Volumen auf V_B gebracht und danach die Temperatur verändert werden.

Zeichnen Sie die beiden Wege im V, T -Diagramm ein und berechnen Sie die erforderliche Wärmezufuhr für jeden dieser Wege.

Differentialgleichungen

Lösen Sie folgende Differentialgleichungen:

7.

- (a) $y' = \frac{e^y x}{e^y + x^2 e^y}$
- (b) $y' = y(\cos x + \sin x)$
- (c) $y' + 2y = yx^2 \quad y(0) = 1$
- (d) $(1+x)y' = -3y \quad y(6) = 7$
- (e) $x^2 \frac{dy}{dx} + y^2 = 0 \quad y(1) = 3$

8.

- (a) $2xy dx + (x^2 + 1) dy = 0$
- (b) $(x - y \cos x) dx - \sin x dy = 0$
- (c) $(ye^{xy} + 4y^3) dx + (xe^{xy} + 12xy^2 - 2y) dy = 0 \quad y(0) = 2$
- (d) $y' - \frac{3}{x}y = x^3 \quad y(1) = 4$
- (e) $y' - 2y = x^2 e^{2x}$
- (f) $y' - \frac{y}{x} = -\frac{5}{2}x^2 y^3$

9.

- (a) $y'' - 3y' + 2y = 0$
- (b) $4y'' + 20y' + 25y = 0 \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 2$
- (c) $y'' + 4y = 3 \sin x$
- (d) $y'' - 3y' + 2y = 6e^{3x}$
- (e) $y'' + y' = x^3 - x^2$
- (f) $y'' - 4y' + 5y = 2e^{2x} \cos x$
- (g) $y'' + 4y' + 4y = xe^x + \sin x$