Mathematik 2 C SS 2006

3. Übungsblatt

Integralrechnung

1. Berechnen Sie folgende unbestimmten Integrale:

(a)	$\int \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,dt$	(e)	$\int x \cdot e^x\,dx$	(h)	$\int \frac{x\,dx}{x^4-5x^2+4}$
(b)	$\int (4x-5)^2\,dx$	(f)	$\int e^x \cdot \sin x\,dx$	(i)	$\int \frac{dt}{2+\sin t}$
(c)	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx$	(g)	$\int \frac{x^4-x^2-x-2}{x^5+x^3}\,dx$	(j)	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}$
(d)	$\int \cos^2 x\,dx$				

2. Ermitteln Sie den Wert folgender Integrale:

(a) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ $\quad (b)$ $\int\limits_{-1}^{0} e^x\,dx$ $\quad (c)$ $\int\limits_{0}^{1} x^a\,dx$ $\quad (a \in \mathbb{R}$, Falluntersch.!)

3. Untersuchen Sie folgende uneigentlichen Integrale auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. deren Wert.

(a)	$\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^n} \quad (n \in \mathbb{N})$	(d)	$\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{x\,dx}{1+x^2}$
(b)	$\int\limits_{-\infty}^{\infty} t\,e^{-t^2}\,dt$	(e)	$\int\limits_{-1}^{1} \ln\lvert x\rvert\,dx$
(c)	$\int\limits_{-2}^{2} \frac{dx}{x^2-4}$		

4. Bestimmen Sie folgende Integrale numerisch sowohl nach der Trapezregel als auch mit der Simpson-Regel. Berechnen Sie jeweils den Fehler zur exakten Lösung und verbessern Sie die Näherungslösung durch Teilung des Intervalls:

(a)	$\int\limits_{0}^{1} x^2\,dx$	(c)	$\int\limits_{0}^{\pi} \sin x\,dx$
(b)	$\int\limits_{1}^{4} \sqrt{x}\,dx$	(d)	$\int\limits_{0}^{2} \sqrt{1+x^3}\,dx$ (exakt nicht lösbar !)

Anwendung der Integralrechnung

5. Berechnen Sie die Bogenlänge folgender Funktionen:

   (a) $f(x) = \frac{1}{c}\cosh(cx) + d \qquad a \leq x \leq b \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R} \quad c \neq 0$

   (b) $f(x) = \ln(1 - x^2) \qquad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$

6. Bestimmen Sie die durch folgende Begrenzungen gegebenen Volumina:

   (a) $x^2y^2 + h^2z^2 = a^2y^2 \qquad 0 \leq y \leq h$

   (b) $x^2 + y^2 = 4 - z \qquad x \geq 0 \qquad 0 \leq y \leq x \qquad z \geq 0$

   (c) $z^2 = 2xy \qquad 0 \leq x \leq a \qquad 0 \leq y \leq a \qquad z \geq 0$

7. Berechnen sie jeweils die Oberfläche:

   (a) $z(x, y) = x + \sqrt{2}\cosh y \qquad 0 \leq x \leq 2 \qquad 0 \leq y \leq x$

   (b) der oberen Begrenzungsfläche aus (6c).

8. Berechnen Sie den Wert folgender Linienintegrale entlang der angegebenen Wege C (jeweils von links nach rechts durchlaufen):

   (a) $\int\limits_C (x^2 - y^2)\,dx + 2xy\,dy$ entlang $y = x^2 \qquad 0 \leq x \leq 1$

   (b) $\int\limits_C xy\,dx + y\,dy$ entlang $y = \cos x \qquad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

   (c) $\int\limits_C y\,dx - x\,dy$, wobei C der obere Halbkreisbogen mit Radius $r \geq 0$ um den Ursprung sei.