Mathematik 2 C SS 2006

1. Übungsblatt

Definitheit

1. Man überprüfe folgende Matrizen auf Definitheit:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} x^2+1 & 3x \\ x-2 & 4 \end{pmatrix}_{x=1}$$

2. Für welche Werte von a ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & a & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

positiv definit?

Partielles Differenzieren

3. Man bestimme die ersten Ableitungen von $z = \sqrt{x^2+y^2}$ sowie sämtliche 1. und 2. Ableitungen von $z = \arctan \frac{y}{x}$

4. Bestimmen Sie f_{xy} und f_{yx} der Funktion $f(x,y) = xe^y + \sqrt{1+x^3}$. Was fällt dabei auf?

5. Man bestimme $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial z \partial y}$ und $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$ für $u = \sin(xyz)$.

6. Man zeige, daß für die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{für}(x,y) = (0,0) \\ \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & \text{sonst} \end{cases}$$

im Ursprung $f_{xy} \neq f_{yx}$ gilt. (Vgl. Satz von Schwarz).

Martin Raindl Sprechstunde: Fr. 10 - 11 Uhr, SrC 208
raindl@opt.math.tu-graz.ac.at http://www.opt.math.tu-graz.ac.at/~raindl

Funktionen in mehreren Variablen

7. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit
$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}.$$
Für welche Punkte des $\mathbb{R}^2$ ist f umkehrbar ? Ist f global umkehrbar ?

8. Überprüfen Sie, ob die Funktion $f(x,y,z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit
$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz - 1 \\ 2xz \\ 4x^2 + z \end{pmatrix}$$
in einer Umgebung des Punktes $(2,2,0)$ umkehrbar ist.

9. Für welche Werte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist die Funktion
$$z(x,y) = \begin{pmatrix} \ln x - \ln y \\ xy \end{pmatrix}$$
umkehrbar ? Berechnen Sie dazu die Umkehrfunktion z^{-1}.

10. Zeigen Sie, daß sich die Gleichung
$$f(x,y) = y^5 e^y - (2x^2 + 3)\sin y + y^2 x^2 - x \cos x = 0$$
in einer Umgebung von $(0,0)$ nach y auflösen läßt (d.h. $y = g(x)$). Bestimmen Sie ferner $g'(0)$ und $g''(0)$.

11. Sei $z = u^2 \cos v$ mit $u = -\frac{y}{x}$ und $v = 2xy$. Berechnen Sie $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ (Kettenregel !).

12. Zur Funktion $g(x,y) = 2xe^{-3y} - x^4 y$ berechne man das totale Differential dg sowie das vollständige Differential 2. Ordnung.

Taylorentwicklung

13. Man entwickle die Funktion $f(x,y) = \sin \frac{xy}{2}$ nach Potenzen von $x - 1$ und $y + 1$ bis zur dritten Ordnung.

14. Entwickeln Sie $f(x,y) = \frac{e^x e^y}{1+x+y}$ um den Nullpunkt in eine Taylorreihe (Hinweis: Finden Sie eine geeignete Substitution u, um die bekannte Reihe für e^u verwenden zu können !)