

B Gegeben ist die Vektorfunktion

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 12x^2yz - 2xy - 2ze^{2xz} \\ 4x^3z - x^2 \\ 4x^3y - 2xe^{2xz} \end{pmatrix}$$

Man überprüfe, ob $\vec{a}$ durch Gradientenbildung aus einer Potentialfunktion U entstanden ist und berechne ggf. diese Funktion.

1. Test bzgl. Potentialfunktion:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_1}{\partial y} &= 12x^2z - 2x = \frac{\partial a_2}{\partial x} \quad \checkmark \\ \frac{\partial a_1}{\partial z} &= 12x^2y - 2e^{2xz} - 4xz e^{2xz} = \frac{\partial a_3}{\partial x} \quad \checkmark \\ \frac{\partial a_2}{\partial z} &= 4x^3 = \frac{\partial a_3}{\partial y} \quad \checkmark \end{aligned}$$

$\Rightarrow \vec{a}$ ist durch Gradientenbildung aus einer Potentialfunktion U entstanden.

2. Berechnung der Potentialfunktion $U(x, y, z)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= 12x^2yz - 2xy - 2ze^{2xz} \Rightarrow U = \int (12x^2yz - 2xy - 2ze^{2xz}) dx = 4x^3yz - x^2y - e^{2xz} + C_1(y, z) \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= 4x^3z - x^2 \Rightarrow U = \int (4x^3z - x^2) dy = 4x^3yz - x^2y + C_2(x, z) \\ \frac{\partial U}{\partial z} &= 4x^3y - 2xe^{2xz} \Rightarrow U = \int (4x^3y - 2xe^{2xz}) dz = 4x^3yz - e^{2xz} + C_3(x, y) \end{aligned}$$

Es ergeben sich nun verschiedene Möglichkeiten, die Konstanten und somit U zu bestimmen. Z.B.: U aus der 2. Zeile nach z abgeleitet ergibt:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = 4x^3y + \frac{\partial C_2(x, z)}{\partial z}$$

Mit der 3. Komponente des geg. Vektors gleichgesetzt:

$$4x^3y + \frac{\partial C_2(x, z)}{\partial z} = 4x^3y - 2xe^{2xz}$$

und somit:

$$\frac{\partial C_2(x, z)}{\partial z} = -2xe^{2xz} \Rightarrow C_2(x, z) = \int -2xe^{2xz} dz = -e^{2xz} + C_4(x)$$

Dieses $C_2(x, z)$ in U der mittleren Zeile eingesetzt liefert:

$$U = 4x^3yz - x^2y - e^{2xz} + C_4(x)$$

Ableitung nach x und gleichsetzen mit der 1. Komponente des geg. Vektors

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 12x^2yz - 2xy - 2ze^{2xz} + C_4'(x) = 12x^2yz - 2xy - 2ze^{2xz}$$

ergibt

$$C_4'(x) = 0 \quad \text{und somit} \quad C_4(x) = C \quad (\text{Konstante})$$

Die gesuchte Potentialfunktion lautet also:

$$\underline{\underline{U(x, y, z) = 4x^3yz - x^2y - e^{2xz} + C}}$$