Mathematatik 2 C **SS 2006**

Lösung
zur 4. Aufgabe

zu 1.

$$y = ax^2 + bx + c \text{ mit } y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0 \quad \Rightarrow \quad y = ax^2 + bx$$

$$F(a,b) := \sum_{i=1}^{5} \left(y_i - ax_i^2 - bx_i\right)^2 \to \min$$

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \sum 2\left(y_i - ax_i^2 - bx_i\right)(-x_i^2) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \sum \left(y_i x_i^2 - ax_i^4 - bx_i^3\right) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = \sum 2\left(y_i - ax_i^2 - bx_i\right)(-x_i) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \sum \left(y_i x_i - ax_i^3 - bx_i^2\right) \stackrel{!}{=} 0$$

führt auf das Gleichungssystem in Kurzschreibweise

$$a\,[x^4] + b\,[x^3] = [x^2 y]$$

$$a\,[x^3] + b\,[x^2] = [xy]$$

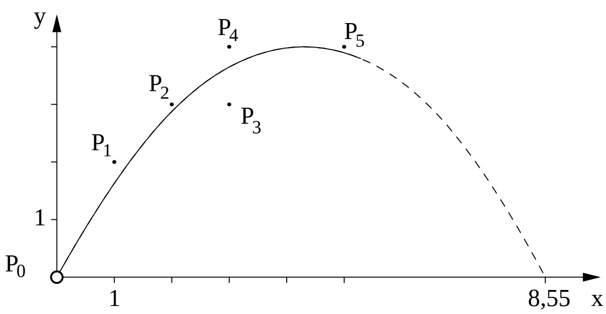
x	y	x^2	x^3	x^4	xy	x^2y
1	2	1	1	1	2	2
2	3	4	8	16	6	12
3	3	9	27	81	9	27
3	4	9	27	81	12	36
5	4	25	125	625	20	100
14	16	48	188	804	49	177

$$804\,a + 188\,b = 177$$

$$\underline{188\,a + 48\,b = 49}$$

$$\hookrightarrow a \doteq -0.2204, \quad b \doteq 1.8842$$

$$\underline{\underline{y = -0.2204\,x^2 + 1.8842\,x}}$$



Zweite Nullstelle: $y = x(-0.2204\,x + 1.8842) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_N = \frac{1.8842}{0.2204} = \underline{\underline{8.547}}$

zu 2. Formel für die Dichte ρ des quadratischen Prismas:

$$\rho = \frac{\text{Masse}}{Volumen} = \frac{m}{a^2 h} \approx \frac{162.4}{1.2^2 \cdot 23.3} \doteq 4.84\ [g/cm^3]$$

Fehlerfortpflanzung:

$$s_\rho = \sqrt{\left(\frac{1}{a^2 h}\right)^2 s_m^2 + \left(\frac{-2m}{a^3 h}\right)^2 s_a^2 + \left(\frac{-m}{a^2 h^2}\right)^2 s_h^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{1.2^2 \cdot 23.3}\right)^2 0.2^2 + \left(\frac{-2 \cdot 162.4}{1.2^3 \cdot 23.3}\right)^2 0.01^2 + \left(\frac{-162.4}{1.2^2 \cdot 23.3^2}\right)^2 0.05^2} \doteq 0.0816$$

Die mittlere Dichte des Materials beträgt somit etwa $\underline{\underline{4.84 \pm 0.082}}$ $[g/cm^3]$

Anmerkung: Die *relative* Meßgenauigkeit beträgt $\frac{100\% \cdot 0.082}{4.84} \approx 1.7\%$

zu 3. Division der Gleichung durch x liefert die Standardform einer linearen Dgl.:

$$y' - \tfrac{2}{x}y = x^2 - \tfrac{2}{x} \qquad (x \neq 0)$$

Allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\int \frac{2}{x}\,dx}\left[C + \int \left(x^2 - \tfrac{2}{x}\right) e^{-\int \frac{2}{x}\,dx}\,dx\right] = e^{2\ln x}\left[C + \int \left(x^2 - \tfrac{2}{x}\right) e^{-2\ln x}\,dx\right] \\ &= e^{\ln x^2}\left[C + \int \left(x^2 - \tfrac{2}{x}\right) e^{\ln x^{-2}}\,dx\right] = x^2\left[C + \int \left(x^2 - \tfrac{2}{x}\right) x^{-2}\,dx\right] \\ &= x^2\left[C + \int \left(1 - \tfrac{2}{x^3}\right)\,dx\right] = x^2\left[C + x + \tfrac{1}{x^2}\right] = Cx^2 + x^3 + 1 \end{aligned}$$

Anfangswert eingesetzt:

$$y(1) = C + 1 + 1 = 4 \quad \Rightarrow \quad C = 2$$

Spezielle Lösung:

$$\underline{\underline{y(x) = 2x^2 + x^3 + 1}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{y(2)}} = 2 \cdot 2^2 + 2^3 + 1 = \underline{\underline{17}}$$

$y'(1)$ kann bequem durch Einsetzen von $x = 1$ und $y = 4$ in die Dgl. bestimmt werden:

$$1 \cdot y'(1) - 2 \cdot 4 = 1 - 2 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{y'(1) = 7}}$$

zu 4.

$$\frac{M_y - N_x}{-M} = \frac{4xy - (-4xy)}{-2x(1+y^2)} = \frac{8xy}{-2x(1+y^2)} = \frac{-4y}{1+y^2} = g(y)$$

$$\Rightarrow \quad \mu(y) = e^{\int \frac{-4y}{1+y^2}\,dy} = e^{\int \frac{-2}{u}\,du} = e^{-2\ln u} = u^{-2} = \frac{1}{(1+y^2)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2x(1+y^2)}{(1+y^2)^2}dx + \frac{1 - 2x^2y + y^2}{(1+y^2)^2}dy = 0 \quad \text{ist exakte Dgl.}$$

$$\Rightarrow \quad F(x,y) = \int\limits_{\tilde{x}=0}^{x} \frac{2\tilde{x}}{1+y^2}d\tilde{x} + \int \frac{1 - \overbrace{2\cancel{\tilde{x}}_0\, y}^{0} + y^2}{(1+y^2)^2}dy = \left[\frac{\tilde{x}^2}{1+y^2}\right]_0^x + \int \frac{dy}{1+y^2}$$

$$= \underline{\underline{\frac{x^2}{1+y^2} + \arctan(y) = C}}$$