**Mathematik 2 C** **SS 2006**

# Lösung
## zur 2. Aufgabe

zu 1. *Uneigentliches* Integral mit Problemstellen bei 1 und −1.

- Unbestimmtes Integral, Substitution $x = \sin t$, $\frac{dx}{dt} = \cos t \Rightarrow dx = \cos t\, dt$:

$$\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\sin^2 t \cos t\, dt}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = \int \frac{\sin^2 t \cos t\, dt}{\cos t} = \int \sin^2 t\, dt$$

$$= \frac{t - \sin t \cos t}{2} + C = \frac{1}{2}\arcsin x - \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + C$$

- Aufteilung bei $x = 0$: berechne zunächst rechtes Integral:

$$\int_0^1 \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{B\to 1}\int_0^B \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{B\to 1}\left[\frac{1}{2}\arcsin(x) - \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}\right]_0^B$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\arcsin(1)}_{=\pi/2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-1} - \frac{1}{2}\underbrace{\arcsin(0)}_{=0} + 0\sqrt{1-0} = \frac{\pi}{4}$$

- Der Integrand $\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ ist symmetrisch bzgl. $x$. Das zweite Integral (von −1 bis 0) hat also ganau den selben Wert wie oben. Somit ergibt sich insgesamt der doppelte Wert:

$$\underline{\underline{\int_{-1}^{1} \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}}}$$

zu 2. Die benötigten *Stützstellen* ergeben sich aus der äquidistanten Aufteilung des Intervalls in 4 Teilintervalle der Länge $\pi/8$. Die zugehörigen Funktionswerte $f(\varphi) = \sqrt{1+\cos^2\varphi}$ sind tabellarisch zusammengefaßt:

| $\varphi$ | 0 | 0.3927 | 0.7854 | 1.1781 | 1.5708 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(\varphi)$ | 1.4142 | 1.3615 | 1.2247 | 1.0707 | 1 |

(a)

$$2 \cdot \frac{0.3927}{2} \cdot \left(1.4142 + 2\cdot 1.3615 + 2\cdot 1.2247 + 2 \cdot 1.0707 + 1\right) \approx \underline{\underline{3.8202}}$$

(b)

$$2 \cdot \frac{0.7854}{6} \cdot \left(1.4142 + 4\cdot 1.3615 + 2\cdot 1.2247 + 4 \cdot 1.0707 + 1\right) \approx \underline{\underline{3.8203}}$$

zu 3. mit E als Längeneinheit:

- Eckdaten des Gebiets:
  - die erste Ecke ist der Ursprung (Schnitt der Koordinatenachsen).
  - Schnitt der Funktion mit der $x$−Achse (d.h. $y = 0$):

$$8 - x\sqrt{x} = 0 \quad\Rightarrow\quad x\sqrt{x} = 8 \quad\Rightarrow\quad x^3 = 64 \quad\Rightarrow\quad x = 4$$

– Schnitt der Funktion mit der $y-$Achse (d.h. $x = 0$):

$$8 - 0 = 8 \quad \Rightarrow \quad y = 8$$

- Fläche:

$$A = \int\limits_0^4 8 - x\sqrt{x}\, dx = \left[8x - \frac{2}{5}x^2\sqrt{x}\right]_0^4 = 32 - \frac{64}{5} = \underline{\underline{19.2}}\ \text{E}^2$$

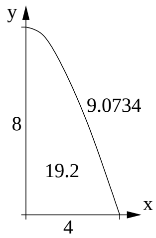
- Bogenlänge: mit $y = 8 - x\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

$$b = \int\limits_0^4 \sqrt{1 + \frac{9x}{4}}\, dx = \left[\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\left(1 + \frac{9x}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{8}{27}\sqrt{1000} - \frac{8}{27} \doteq 9.0734$$

- Umfang = Bogenlänge + Abschnitt der $x-$ und der $y$-Achse:

$$U = 9.0734 + 8 + 4 = \underline{\underline{21.0734}}\ \text{E}$$

- Skizze:




zu 4. Aus den beiden $z-$Angaben folgt durch Gleichsetzen die Berandung des (geschlossenen) Bereichs: $x^2 + y^2 = b^2$ (Kreis mit Radius $b$)

$$V = \int\limits_{x=-b}^{b} \int\limits_{y=-\sqrt{b^2-x^2}}^{\sqrt{b^2-x^2}} \int\limits_{z=\frac{h}{b}\sqrt{x^2+y^2}}^{h} dz\, dy\, dx = \int\limits_{x=-b}^{b} \int\limits_{y=-\sqrt{b^2-x^2}}^{\sqrt{b^2-x^2}} \left(h - \frac{h}{b}\sqrt{x^2+y^2}\right) dy\, dx \ldots$$

Wesentlich einfacher als die Auswertung dieses Integrals ist die empfohlene Überführung in Polarkoordinaten, da der Kreis mit Radius $b$ dort durch die simplen Forderungen $r = 0 \ldots b$ und $\varphi = 0 \ldots 2\pi$ abgedeckt werden kann:

$$V = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{b} \left(h - \frac{h}{b}r\right) r dr\, d\varphi = h \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{b} \left(r - \frac{r^2}{b}\right) dr\, d\varphi = h \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3b}\right]_0^b d\varphi$$

$$= h \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{b^2}{6}\, d\varphi = \frac{hb^2}{6}\left[\varphi\right]_0^{2\pi} = \underline{\underline{\frac{hb^2\pi}{3}}}$$