Mathematatik 2 C **SS 2006**

Lösung
zur 1. Aufgabe

zu 1. (a)

$$|J_f| = \begin{vmatrix} 2xy & x^2 \\ y^2 & 2xy \end{vmatrix} = 4x^2y^2 - x^2y^2 = 3x^2y^2 = 0 \text{ für } x = 0 \text{ oder } y = 0$$

Die Funktion ist für alle Werte (x, y) umkehrbar, die $\underline{\underline{\text{nicht auf den Koordinatenachsen}}}$ liegen.

(b)

$$\begin{pmatrix} x^2y \\ xy^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \overset{\text{1.Zeile}}{\Rightarrow} y = \frac{5}{x^2} \overset{\text{2.Zeile}}{\Rightarrow} x \cdot \frac{25}{x^4} = 3 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{\frac{25}{3}} \doteq \underline{\underline{2.0274}}$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{5 \cdot 3^{2/3}}{25^{2/3}} = \frac{3^{2/3}}{5^{1/3}} = \sqrt[3]{\frac{9}{5}} \doteq \underline{\underline{1.21644}}$$

Zur Kontrolle:

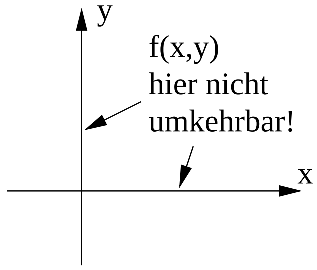
$$f(2.0274, 1.21644) \simeq \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

zu 2. Verwendung der Taylorreihe für die Exponentialfunktion:

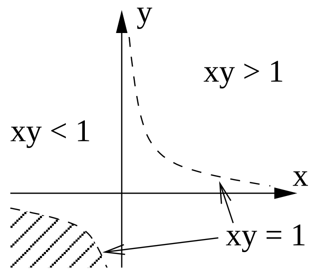
$$e^{xy} = 1 + xy + \frac{x^2y^2}{2!} + \frac{x^3y^3}{3!} + T.h.O.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad (x+y)e^{xy} &= (x+y)\left(1 + xy + \frac{x^2y^2}{2!} + \frac{x^3y^3}{3!} + \dots\right) \\ &= x + y + x^2y + xy^2 + \underbrace{\frac{x^3y^2}{2!} + \frac{x^2y^3}{2!}}_{\text{bereits Terme der Ordnung 5}} + \dots \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{T_3(x,y) = x + y + x^2y + xy^2}}$$



zu Bsp.1(a)



zu Bsp. 3(c)

zu 3. (a)

$$
\begin{aligned}
f_x(x,y) &= 3x^2+6y \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad y=-\frac{x^2}{2} \\
f_y(x,y) &= 6x+3y^2 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad 6x+3\frac{x^4}{4}=0
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \quad 3x\left(8+x^3\right)=0 \quad \Rightarrow \quad x=0 \rightarrow x_0 \text{ oder } x^3+8=0 \rightarrow x_1=-\sqrt[3]{8}=-2$$

$$\left(x^3+8\right) \div (x+2) = x^2-2x+4 \rightarrow \text{keine weiteren Nullstellen} \in \mathbb{R}!$$

$$\Rightarrow \quad y_0=0 \text{ bzw. } y_1=-\frac{(-2)^2}{2}=-2$$

$$\Rightarrow \quad 2 \text{ lokale Extrema: } P_0=(0,0) \text{ und } \underline{\underline{P_1=(-2,-2)}}.$$

$$H_f(x,y)=\begin{pmatrix} 6x & 6 \\ 6 & 6y \end{pmatrix}, \qquad \det H_f = 36(xy-1)$$

$$H_f(0,0) \text{ ist indefinit } (\det H_f=-36<0) \quad \Rightarrow \quad P_0 \ldots \text{Sattelpunkt}$$

$$H_f(-2,-2) \text{ ist negativ definit } \left[\begin{smallmatrix} 6x=-12<0 \\ \det H_f=108>0 \end{smallmatrix}\right] \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{P_1 \ldots \text{ rel. Maximum}}}$$

(b) Gebiet $G := \left[(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; -3 \le x,y \le 3\right]$

- lokale Extrema: siehe (a)
- Ränder:

$$
\begin{aligned}
x=-3: \quad f(-3,y) &:= f_1(y) = -27-18y+y^3 \\
f_1'(y) &= -18+3y^2 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad y=\pm\sqrt{6} \doteq \pm 2.45 \\
x=+3: \quad f(3,y) &:= f_2(y) = 27+18y+y^3 \\
f_2'(y) &= 18+3y^2 \stackrel{!}{=} 0 \ldots \text{ keine Nullstellen } \in \mathbb{R} \\
y=-3: \quad f(x,-3) &:= f_3(x) = x^3-18x-27 \\
f_3'(x) &= 3x^2-18 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x=\pm\sqrt{6} \doteq \pm 2.45 \\
y=+3: \quad f(x,3) &:= f_4(y) = x^3+18x+27 \\
f_4'(x) &= 3x^2+18 \stackrel{!}{=} 0 \ldots \text{ keine Nullstellen } \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

- Ecken: siehe Tabelle, $P_6 \ldots P_9$.

	x	y	$f(x,y)$			x	y	$f(x,y)$	
P_1	-2	-2	8		P_6	3	3	108	$\leftarrow$ max
P_2	-3	2.45	-56.4	$\leftarrow$ min	P_7	-3	-3	0	
P_3	-3	-2.45	2.4		P_8	3	-3	-54	
P_4	2.45	-3	-56.4	$\leftarrow$ min	P_9	-3	3	-54	
P_5	-2.45	-3	2.4						

(c) Es muß gelten: $x<0$ und $xy-1>0$, also $xy>1$:

$$xy>1 \text{ und } x<0 \quad \Rightarrow \quad x<0 \text{ und } y<\frac{1}{x}$$

Das ist der Bereich unter der Einheits-Hyperbel im 3. Quadranten (links unten)