Mathematik 2 C **SS 2004**

Lösung
zur 3. Aufgabe

1.

$$f(x,y) = e^x \sin(y) \Rightarrow \operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} e^x \sin(y) \\ e^x \cos(y) \end{pmatrix} \overset{Q=(0,2)}{=} \begin{pmatrix} 0.9093 \\ -0.4161 \end{pmatrix}$$

Normierter Richtungsvektor $\tilde{\vec{a}}$:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \|\vec{a}\| = \sqrt{5}; \quad \tilde{\vec{a}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Richtungsableitung:

$$\langle \tilde{\vec{a}}, \operatorname{grad}(f) \rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.9093 \\ -0.4161 \end{pmatrix} = \underline{\underline{0.6272}}$$

Ableitung in Gegenrichtung:

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.9093 \\ -0.4161 \end{pmatrix} = \underline{\underline{-0.6272}}$$

2. Für die Ausgleichsgerade $y(x) = ax + b$ ergeben sich a und b mit

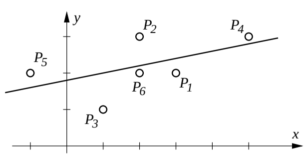
$$a = \frac{n[xy] - [x][y]}{n[x^2] - [x]^2} \quad \text{und} \quad b = \frac{[x^2][y] - [x][xy]}{n[x^2] - [x]^2}$$

Die benötigten Werte in tabellarischer Aufstellung:

i	1	2	3	4	5	6	[ ]
x_i	3	2	1	5	-1	2	12
y_i	2	3	1	3	2	2	13
x_i^2	9	4	1	25	1	4	44
$x_i y_i$	6	6	1	15	-2	4	30

$$a = \frac{6 \cdot 30 - 12 \cdot 13}{6 \cdot 44 - 12^2} = \underline{0.2} \qquad b = \frac{44 \cdot 13 - 12 \cdot 30}{6 \cdot 44 - 12^2} = \underline{1.7\dot{6}}$$

$$\underline{\underline{y(x) = 0.2\,x + 1.7\dot{6}}}$$



3. Hinweis:
Es gibt zwei unterschiedliche Arten von Fehlern, nämlich

- Mittlerer Fehler, Berechnung als Wurzel der Summe der Fehlerquadrate (wie in der VO)
- Absoluter Fehler, Berechnung als Summe der Absolutbeträge der Fehler (wie in d. UE)

Ich habe hier beide Möglichkeiten zugelassen und ausgeführt:

$$P = \frac{U}{2r} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial U} = \frac{1}{2r}; \quad \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{-U}{2r^2};$$

(a) Mittlerer Fehler:

$$P = \frac{29.91}{2 \cdot 4.76} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot 4.76}\right)^2 \cdot 0.005^2 + \left(\frac{-29.91}{2 \cdot 4.76^2}\right)^2 \cdot 0.005^2}$$

$$= \underline{\underline{3.1418 \pm 0.0033}}$$

Absoluter Fehler:

$$P = \frac{29.91}{2 \cdot 4.76} \pm \left(\left|\frac{1}{2 \cdot 4.76}\right| \cdot 0.005 + \left|\frac{-29.91}{2 \cdot 4.76^2}\right| \cdot 0.005\right)$$

$$= \underline{\underline{3.1418 \pm 0.0038}}$$

(b) Mittlerer Fehler:

$$P = \frac{29.91}{9.52} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{9.52}\right)^2 \cdot 0.005^2 + \left(\frac{-29.91}{9.52^2}\right)^2 \cdot 0.005^2}$$

$$= \underline{\underline{3.1418 \pm 0.0017}}$$

Absoluter Fehler:

$$P = \frac{29.91}{9.52} \pm \left(\left|\frac{1}{9.52}\right| \cdot 0.005 + \left|\frac{-29.91}{9.52^2}\right| \cdot 0.005\right)$$

$$= \underline{\underline{3.1418 \pm 0.0022}}$$

Man erkennt, daß sich mittlere und absolute Fehler kaum unterscheiden. Beide Fehler sind jedoch im Fall (a) deutlich höher als im Fall (b).

4.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + \sin x}{y^2} \quad \Rightarrow \; y^2\,dy = (1 + sinx)\,dx \;\Rightarrow\; \int y^2\,dy = \int dx + \int sinx\,dx$$

$$\Rightarrow \; \frac{y^3}{3} = x - \cos x + C \;\Rightarrow\; \underline{y(x) = \sqrt[3]{3(x - \cos x + C)}}$$

Anfangswert (eingesetzt in den linken Ausdruck):

$$\frac{3^3}{3} = 0 - \underbrace{\cos 0}_{1} + C \quad \Rightarrow \quad C = 10$$

$$\underline{\underline{y(x) = \sqrt[3]{3(x - \cos x + 10)}}}$$

5.

$$\underbrace{1 + 2xy}_{M}\; dx + \underbrace{(x^2 + 2y)}_{N}\; dy = 0$$

$M_y = 2x$; $\quad N_x = 2x$; $\quad M_y = N_x$, die Differentialgleichung ist exakt.

$$F = \int (1 + 2xy)\,dx \; = \; x + x^2 y + C(y)$$

$$F_y = x^2 + C'(y) \stackrel{!}{=} x^2 + 2y \quad \Rightarrow \quad C'(y) = 2y \;\Rightarrow\; C(y) = y^2$$

$$F(x, y) = \underline{x + x^2 y + y^2 = C}$$

Einsetzen des geforderten Punktes $(x = 2, y = 0)$ liefert den Wert der Konstanten $\underline{C = 2}$:

$$\underline{\underline{x + x^2 y + y^2 = 2}}$$