Mathematik 2 C **SS 2004**

Lösung

zur 2. Aufgabe

1. Der Integrand ist für $x \to 2$ nicht beschränkt.

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{A\to 2-} \int_0^A \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

Nebenrechnung ($x = 2\sin t$, $\frac{dx}{dt} = 2\cos t$, $dx = 2\cos t\, dt$):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{2\cos t\, dt}{\sqrt{4-4\sin^2 t}} = \int \frac{\cancel{2}\cos t\, dt}{\cancel{2}\sqrt{1-\sin^2 t}} =$$

$$= \int \frac{\cos t\, dt}{\sqrt{\cos^2 t}} = \int dt = t + C = \arcsin(\frac{x}{2}) + C$$

Für das bestimmte Integral gilt damit:

$$\lim_{A\to 2-} \int_0^A \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{A\to 2-} \left[\arcsin \frac{x}{2}\right]_0^A =$$

$$= \lim_{A\to 2-} \left(\arcsin \frac{A}{2}\right) - \arcsin\frac{0}{2} = \underbrace{\arcsin 1}_{\pi/2} - \underbrace{\arcsin 0}_{0} = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$$

Das Integral liefert also einen endlichen Wert und ist damit konvergent.

2.

$$\int_{x=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{y=0}^{\sin x} e^y \cos x dy dx = \int_{x=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [e^y]_0^{\sin x} \cos x dx = \int_{x=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (e^{\sin x} - \underbrace{e^0}_{1}) \cos x dx =$$

$$= \int_{x=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\overbrace{\sin x}^{u}} \overbrace{\cos x\, dx}^{du} - \int_{x=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = \left[e^{\sin x}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - [\sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= e^{\sin(\frac{\pi}{2})} - e^{\sin(-\frac{\pi}{2})} - [\sin(\pi/2) - \sin(-\pi/2)] = e^1 - e^{-1} - 2 = \mathbf{0.3504}$$

3.

$$\operatorname{div}\begin{pmatrix} z\sin y \\ z\cos x \\ xy \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x}(z\sin y) + \frac{\partial}{\partial y}(z\cos x) + \frac{\partial}{\partial z}(xy) = 0+0+0 = \mathbf{0}$$

$$\operatorname{rot}\begin{pmatrix} z\sin y \\ z\cos x \\ xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}(xy) & - \frac{\partial}{\partial z}(z\cos x) \\ \frac{\partial}{\partial z}(z\sin y) - & \frac{\partial}{\partial x}(xy) \\ \frac{\partial}{\partial x}(z\cos x) - & \frac{\partial}{\partial y}(z\sin y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & - & \cos x \\ \sin y & - & y \\ -z\sin x & - & z\cos y \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div}\begin{pmatrix} x - \cos x \\ \sin y - y \\ -z(\sin x + \cos y) \end{pmatrix} = 1 + \sin x + \cos y - 1 - (\sin x + \cos y) = \mathbf{0}$$

4.

(a) Zwei Teilwege:

$$\int\limits_C y^2\,dx + (x-y)\,dy = \int\limits_{C_1} y^2\,dx + (x-y)\,dy + \int\limits_{C_2} y^2\,dx + (x-y)\,dy$$

wobei z.B. C_1 die Parabel $y_1 = x^2$ und C_2 das Geradenstück $y_2 = 1$ darstellen.
In den Schnittpunkten müssen die beiden Weg-Gleichungen übereinstimmen: $y_1 = x^2 = 1 = y_2$.
Aus $x^2 = 1$ ergibt sich $x = \pm 1$. Mit diesen Werten sind also beide Wege in x-Richtung begrenzt (x läuft von -1 bis 1 und wieder zurück).
Für die Parabel gilt: $y = x^2$ und damit $\frac{dy}{dx} = 2x$ bzw. $dy = 2x\,dx$.
Für das 1. Integral liefert das:

$$\int\limits_{C_1} = \int\limits_{x=-1}^{1} (x^2)^2\,dx + (x-x^2)2x\,dx = \int\limits_{-1}^{1} (x^4 + 2x^2 - 2x^3)\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} - \frac{2x^4}{4}\right]_{-1}^{1} = \frac{26}{15}$$

Für die Gerade gilt: $y = 1$ und damit $\frac{dy}{dx} = 0$ und folglich $dy = 0$.
Hier läuft die Variable x allerdings von rechts nach links!

$$\int\limits_{C_2} = \int\limits_{x=1}^{-1} 1^2\,dx + (x-1)\underbrace{dy}_{0} = \int\limits_{1}^{-1} dx = [x]_1^{-1} = -2$$

Als Gesamtwert des Linienintegrals ergibt sich somit $\frac{26}{15} + (-2) = -\mathbf{\frac{4}{15}}$

(b) Anwendung der Green'schen Formel:

$$\oint\limits_C \underbrace{y^2}_{f}\,dx + \underbrace{(x-y)}_{g}\,dy = \int\limits_{x=-1}^{1}\int\limits_{y=x^2}^{1} [\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(x-y)}_{1} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}(y^2)}_{2y}]\,dy\,dx$$

$$= \int\limits_{x=-1}^{1}\int\limits_{y=x^2}^{1} (1-2y)dydx = \int\limits_{x=-1}^{1} \left[y - y^2\right]_{x^2}^{1} dx = \int\limits_{x=-1}^{1} (\cancel{1} - \cancel{1} - x^2 + x^4)dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - (\frac{1}{3} - \frac{1}{5}) = -\mathbf{\frac{4}{15}}$$