Lösung
zur 1. Aufgabe

1.

$$\begin{array}{ll}
 z(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & z(1, 1) = \frac{\pi}{4} \\
 z_x(x, y) = \frac{-y}{x^2+y^2} & z_x(1, 1) = -\frac{1}{2} \\
 z_y(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2} & z_y(1, 1) = \frac{1}{2} \\
 z_{xx}(x, y) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} & z_{xx}(1, 1) = \frac{1}{2} \\
 z_{xy}(x, y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} & z_{xy}(1, 1) = 0 \\
 z_{yy}(x, y) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} & z_{yy}(1, 1) = -\frac{1}{2} \\
 z_{xxx}(x, y) = \frac{2y^3-6x^2y}{(x^2+y^2)^3} & z_{xxx}(1, 1) = -\frac{1}{2} \\
 z_{xxy}(x, y) = \frac{2x^3-6xy^2}{(x^2+y^2)^3} & z_{xxy}(1, 1) = -\frac{1}{2} \\
 z_{xyy}(x, y) = \frac{6x^2y-2y^3}{(x^2+y^2)^3} & z_{xyy}(1, 1) = \frac{1}{2} \\
 z_{yyy}(x, y) = \frac{6xy^2-2x^3}{(x^2+y^2)^3} & z_{yyy}(1, 1) = \frac{1}{2}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2 \cdot 1!}(x-1) + \frac{1}{2 \cdot 1!}(y-1) + \\
 &+ \frac{1}{2 \cdot 2!}(x-1)^2 + 2 \frac{0}{2!}(x-1)(y-1) - \frac{1}{2 \cdot 2!}(y-1)^2 - \\
 &- \frac{1}{2 \cdot 3!}(x-1)^3 - 3 \frac{1}{2 \cdot 3!}(x-1)^2(y-1) + 3 \frac{1}{2 \cdot 3!}(x-1)(y-1)^2 + \frac{1}{2 \cdot 3!}(y-1)^3
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{T}_3\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \mathbf{1.2437}$$

(Vergleich: $\arctan(3) = 1.2490$)

2. $F(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 4x$

lokale Extrema: folgendes Gleichungssystem ist zu lösen:

$$\begin{array}{l}
 F_x(x, y) = 2x - y + 4 \stackrel{!}{=} 0 \\
 F_y(x, y) = -x + 2y \stackrel{!}{=} 0
 \end{array}$$

Genau eine Lösung: $x = -\frac{8}{3}$ und $y = -\frac{4}{3} \Rightarrow \mathbf{P} = \left(-\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{16}{3}\right)$

Typ-Bestimmung:

$$H_F(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad 2 > 0, \quad \det(H_F) = 3 > 0$$

Die Hesse-Matrix ist somit positiv definit, der oben ermittelte Wert ist also ein relatives Minimum.

Bestimmung der globalen Extrema im angegebenen Kreis:

Das gefundene relative Minimum liegt im zulässigen Bereich, wie sich durch Einsetzen der Koordinaten ergibt:

$$x^2 + y^2 = \left(-\frac{8}{3}\right)^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = 8.\dot{8} < 16 \quad \checkmark$$

Randextrema: Gesucht sind Maxima und Minima der gegebenen Funktion auf dem Rand des Bereichs, also für $x^2 + y^2 = 16$. Dies ist also eine einzuhaltende Nebenbedingung.

$$F^*(x, y, \lambda) = x^2 - xy + y^2 + 4x + \lambda(x^2 + y^2 - 16) \rightarrow \text{opt.}$$

Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lll}
 F_x^* = 2x - y + 4 + 2\lambda x & \stackrel{!}{=} 0 & | \cdot y (+) \\
 F_y^* = -x + 2y + 2\lambda y & \stackrel{!}{=} 0 & | \cdot x (-) \\
 F_\lambda^* = x^2 + y^2 - 16 & \stackrel{!}{=} 0 & \\
 \hline
 2xy - y^2 + 4y + x^2 - 2xy & \stackrel{!}{=} 0 &
 \end{array}$$

Die vorletzte Gleichung ergibt $x^2 = 16 - y^2$.

Einsetzen in die letzte Zeile liefert: $-y^2 + 4y + 16 - y^2 = 0$

bzw. $y^2 - 2y - 8 = 0 \Rightarrow y \in \{-2, 4\}$

Fall 1.) $y = -2$:
 $x = \pm\sqrt{16 - 4} = \pm\sqrt{12} = \pm 3.464$

Fall 2.) $y = 4$:
 $x = \pm\sqrt{16 - 16} = 0$

Damit ergibt sich folgende Wertetabelle:

x	y	$F(x,y)$
$-\frac{8}{3}$	$-\frac{4}{3}$	-5.3 ← glob. Min.
$-\sqrt{12}$	-2	-4.785
$\sqrt{12}$	-2	36.785 ← glob. Max.
0	4	16.0

Das lokale Minimum ist also zugleich globales Minimum, das globale Maximum wird hingegen am Rand des Bereichs angenommen.

3. Aus $u = 2x + y$ ergibt sich $u_x = 2$ und $u_y = 1$. Analog $v_x = 2$ und $v_y = -1$. Mithilfe der Kettenregel berechnet man zunächst die ersten Ableitungen von w nach den neuen Variablen:

$$w_x = w_u \cdot u_x + w_v \cdot v_x = 2w_u + 2w_v.$$

$$w_y = w_u \cdot u_y + w_v \cdot v_y = w_u - w_v.$$

Für die 2. Ableitungen bekommt man damit ($w_{uv} = w_{vu}$):

$$\begin{aligned} w_{xx} &= (2w_u + 2w_v)_x \stackrel{K.R.}{=} (2w_u + 2w_v)_u \cdot u_x + (2w_u + 2w_v)_v \cdot v_x = \\ &= (2w_{uu} + 2w_{vu}) \cdot 2 + (2w_{uv} + 2w_{vv}) \cdot 2 = \underline{4w_{uu} + 8w_{uv} + 4w_{vv}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_{yy} &= (w_u - w_v)_y \stackrel{K.R.}{=} (w_u - w_v)_u \cdot u_y + (w_u - w_v)_v \cdot v_y = \\ &= (w_{uu} - w_{vu}) \cdot 1 + (w_{uv} - w_{vv}) \cdot (-1) = \underline{w_{uu} + w_{vv}}. \end{aligned}$$

In der gegebenen Gleichung $w_{xx} - 4w_{xx} = 0$ eingesetzt ergibt sich somit als neue Gleichung:

$$4w_{uu} + 8w_{uv} + 4w_{vv} - 4(w_{uu} + w_{vv}) = 0 \text{ und damit } 8w_{uv} = 0$$

bzw. als Endergebnis $\underline{w_{uv} = 0}$

4. a.) Polynomdivision liefert: $\frac{2x^2+x}{x+1} = 2x - 1 + \frac{1}{x+1}$

$$\int \frac{2x^2+x}{x+1} dx = \int 2x dx - \int dx + \int \frac{dx}{x+1} = \underline{x^2 - x + \ln|x+1| + C}$$

- b.) Substitution: $u = e^t \rightarrow \frac{du}{dt} = e^t = u \rightarrow dt = \frac{du}{u}$

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{2t}-1}{e^t} dt &= \int \frac{u^2-1}{u} \frac{du}{u} = \int \frac{u^2-1}{u^2} du = \int du - \int \frac{du}{u^2} = \\ &= u + \frac{1}{u} + C = \underline{e^t + e^{-t} + C} \end{aligned}$$

- c.) Zunächst das unbestimmte Integral:

$$\int \underbrace{(\varphi^2 + 1)}_u \underbrace{\sin 2\varphi}_{dv} d\varphi = (\varphi^2 + 1) \frac{-\cos 2\varphi}{2} - \int \frac{-\cos 2\varphi}{2} 2\varphi d\varphi$$

$$\int \varphi \cos 2\varphi d\varphi = \varphi \frac{\sin 2\varphi}{2} - \int \frac{\sin 2\varphi}{2} d\varphi = \varphi \frac{\sin 2\varphi}{2} + \frac{\cos 2\varphi}{4} + \tilde{C}$$

$$\int (\varphi^2 + 1) \sin 2\varphi d\varphi = (\varphi^2 + 1) \frac{-\cos 2\varphi}{2} + \varphi \frac{\sin 2\varphi}{2} + \frac{\cos 2\varphi}{4} + C$$

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\varphi^2 + 1) \sin 2\varphi d\varphi = \left[(\varphi^2 + 1) \frac{-\cos 2\varphi}{2} + \varphi \frac{\sin 2\varphi}{2} + \frac{\cos 2\varphi}{4} \right]_{-\pi/4}^{\pi/4} =$$

$$= \left(\frac{\pi^2}{16} + 1 \right) \frac{0}{2} + \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{0}{4} - \left(\frac{\pi^2}{16} + 1 \right) \frac{0}{2} - \frac{-\pi}{4} \cdot \frac{-1}{2} - \frac{0}{4} = \mathbf{0}$$

d.) $\int_0^1 \underbrace{\arctan z}_u \cdot \underbrace{dz}_{dv} = [\arctan z \cdot z]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{z^2+1} \cdot z dz = \arctan(1) - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2z dz}{z^2+1} =$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} [\ln|z^2 + 1|]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} (\ln(2) - \ln(1)) = \mathbf{0.4388}$$