Mathematik 2 B WB SS 2006

4. Übungsblatt

17. Man bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichungen und weiters jene Lösungsflächen, die die gegebene Lösungskurve enthalten:
   (a) $yzz_x - xzz_y = xy$ $\quad (x,y,z)^T(t) = (2\sqrt{t}, t-1, \sqrt{2t-1})^T$
   (b) $xyz_x + xzz_y = yz$ $\quad (x,y,z)^T(t) = (2, t, t^2)^T$
   (c) $(x^2 - y^2 - z^2)z_x + 2xyz_y = 2xz$ $\quad (x,y,z)^T(t) = (t, t-1, t)^T$
   (d) $z_x + 2xz_y = -z(x+y)$ $\quad (x,y,z)^T(t) = (0, t, t^2)^T$
   (e) $2xzz_x + 2yzz_y = z^2 - x^2 - y^2$ $\quad (x,y,z)^T(t) = (a, t, \sqrt{a^2+t^2})^T$

18. Welcher quasilinearen partiellen Differentialgleichung genügt die Funktion

$$z(x,y) = xy + w(x^2+y^2)$$

mit einer willkürlich stetig differenzierbaren Funktion w?

19. Lösen Sie folgende partielle Differentialgleichungen:
   (a) $u_{tt} = 9u_{xx} + \sin \pi x$ $\quad u(0,t) = u(1,t) = 0$
   $u(x,t) = ?$ $\quad u(x,0) = \sin 2\pi x + \sin 3\pi x$
   $u_t(x,0) = 0$

   (b) $u_{tt} = u_{xx} + 2x \sin t$ $\quad u(0,t) = r(t) = 0$
   $u(x,t) = ?$ $\quad u(1,t) = s(t) = -\sin t$
   $u(x,0) = \begin{cases} x & \text{für } x \in [0, \frac{1}{4}) \\ -\frac{x}{3} + \frac{1}{3} & x \in (\frac{1}{4}, 1] \end{cases}$
   $u_t(x,0) = 0$

   (c) $u_t = a^2 u_{xx}$ $\quad u(0,t) = u(\pi,t) = 0$
   $u(x,t) = ?$ $\quad u(x,0) = \sin x - \frac{100x}{\pi}$ in $[0,\pi)$

   (d) $u_t = a^2 u_{xx} + t \sin x$ $\quad u(0,t) = u(\pi,t) = 0$
   $u(x,t) = ?$ $\quad u(x,0) = \sin x - \frac{100x}{\pi}$ in $[0,\pi)$

   (e) $z_{tt} = z_{xx} - 2z_t$ $\quad z(0,t) = z(1,t) = 0$
   $z(x,t) = ?$ $\quad z(x,0) = \sin 5\pi x$
   $z_t(x,0) = 0$
   Ansatz: $z(x,t) = F(x)G(y)$

   (f) $z_t = 9z_{xx}$ $\quad z_x(0,t) = z_x(\frac{\pi}{2}, t) = 0$
   $z(x,t) = ?$ $\quad z(x,0) = \cos^2 x - \sin^2 x + \cos 6x$