

2. Übungsblatt

7. Man untersuche, ob alle Nullstellen $\lambda \in \mathbb{C}$ des Polynoms

$$\mathcal{P}(\lambda) = \lambda^5 + 16\lambda^4 + 93\lambda^3 + 242\lambda^2 + 284\lambda + 120$$

in der Halbebene $\operatorname{Re} \lambda < 0$ liegen.

8. Bestimmen Sie die Stabilität oder Instabilität von allen Lösungen der Differentialgleichungssysteme $\dot{x} = Ax$ mit den folgenden Systemmatrizen A :

$$(a) \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & -2 \\ -6 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

9. Man diskutiere die Gleichgewichtslage $x = y = 0$ der folgenden linearen Systeme:

$$\begin{array}{lll} (a) \quad \begin{cases} \dot{x} = x + 4y \\ \dot{y} = x + y \end{cases} & (b) \quad \begin{cases} \dot{x} = -4x - y \\ \dot{y} = 5x + y \end{cases} & (c) \quad \begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = x + y \end{cases} \\ (d) \quad \begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = 2x - y \end{cases} & (e) \quad \begin{cases} \dot{x} = x + 2y \\ \dot{y} = x - y \end{cases} & (f) \quad \begin{cases} \dot{x} = -x + y \\ \dot{y} = -x \end{cases} \end{array}$$

10. Man untersuche die Ruhelage $x = y = 0$ in Abhängigkeit des Parameters $\alpha \in \mathbb{R}$ auf Stabilität, asymptotische Stabilität bzw. Instabilität:

$$\dot{x} = -2x - z, \quad \dot{y} = 3x + \alpha y + 5z, \quad \dot{z} = -x - 2z$$

11. Man bestimme den Charakter der singulären Punkte folgender nichtlinearer Systeme:

$$(a) \quad \begin{cases} \dot{x} = y + xe^y \\ \dot{y} = x + xy \end{cases} \quad (b) \quad \begin{cases} \dot{x} = -x + (x - y)^2 \\ \dot{y} = x + y - 1 \end{cases} \quad (c) \quad \begin{cases} \dot{x} = 2x + y^2 - 1 \\ \dot{y} = 6x - y^2 + 1 \end{cases}$$

12. Man diskutiere folgende Differentialgleichungen in der Phasenebene:

$$\begin{array}{ll} (a) \quad \ddot{x} + \frac{x^2}{2} - 3 = 0 & (b) \quad \ddot{x} + 4x - \frac{5}{x+2} = 0 \\ (c) \quad \ddot{x} = \sin^2 x - \cos^2 x & (d) \quad \ddot{x} + x(e^{x-2} - 1) = 0 \end{array}$$