

1. Übungsblatt

Martin Raindl: raindl@opt.math.tu-graz.ac.at
<http://www.opt.math.tu-graz.ac.at/~raindl>

1. Berechnen Sie näherungsweise $y(0.5)$ für das Anfangswertproblem

$$y' = \sin x - 2xy \quad \text{mit} \quad y(0) = 1$$

mit den folgenden Näherungsverfahren (Schrittweite $h = 0.1$) :

- (a) EULER'sches Polygonzugverfahren
- (b) Modifizierte EULER-Methode
- (c) Vereinfachtes RUNGE-KUTTA-Verfahren

2. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = 2x(y + 1) \quad \text{mit} \quad y(0) = 0$$

durch das Verfahren der *sukzessiven Approximation* und zeigen Sie, daß die *Iterierten* gegen die Lösung $y(x) = e^{x^2} - 1$ konvergieren.

3. Berechnen Sie mittels TAYLOR-Approximation die Werte von $y(1)$ der genäherten Lösungen folgender Differentialgleichungen:

$$(a) \quad x - 1 = \frac{y''}{\sqrt{(1 + y'^2)^3}} \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad h = 0.2$$

$$(b) \quad y'' + \frac{1}{4}y'^2 - y = 0 \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = -1, \quad h = 0.25$$

4. Berechnen Sie mittels Differenzen-Methode die Näherungslösung zu folgenden Randwertproblemen:

$$(a) \quad y'' = x + 2y - 4y' \quad y(1) = 0, \quad y(2) = -3, \quad n = 4$$

$$(b) \quad y'' + 4y' - 2y = \sin(x) \quad y(0) = 1, \quad y(\pi) = 2, \quad n = 5$$

5. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems $\dot{x} = Ax$ sowie eine fundamentale Lösungsmatrix ϕ zu folgenden Systemmatrizen A :

$$(a) \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad (d) \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

6. Lösen Sie

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$$