Partielle Differentialgleichungen

$\boxed{\text{B}}$ Saitenschwingungsgleichung nach der Methode von d'Alembert:

Gegeben:

$$u_{tt} = 100 u_{xx} \qquad u(x,0) = \frac{4}{1+x^4} =: f(x)$$
$$u_t(x,0) = \frac{1}{4+x^2} =: g(x)$$

Lösung: durch Einsetzen in die Lösungsformel

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} g(\tau)\, d\tau$$

mit $c = 10$ ergibt sich durch Einsetzen der geg. Funktionen

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2}\left[\frac{4}{1+(x+10\,t)^4} + \frac{4}{1+(x-10\,t)^4}\right] + \frac{1}{20}\int\limits_{x-10\,t}^{x+10\,t} \frac{1}{4+\tau^2}\, d\tau \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{4}{1+(x+10\,t)^4} + \frac{4}{1+(x-10\,t)^4}\right] + \frac{1}{20}\left[\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\tau}{2}\right)\right]_{x-10\,t}^{x+10\,t} \\
&= \underline{\underline{\left[\frac{2}{1+(x+10\,t)^4} + \frac{2}{1+(x-10\,t)^4}\right] + \frac{1}{40}\left[\arctan\left(\frac{x+10\,t}{2}\right) - \arctan\left(\frac{x-10\,t}{2}\right)\right]}}
\end{aligned}$$

Zusatz: Speziell ergibt sich für die t-Achse (also an der Position $x = 0$) die Funktion

$$u(0,t) = \frac{4}{1+10^4\,t^4} + \frac{1}{20}\arctan(5t) \quad \text{für } t \geq 0$$

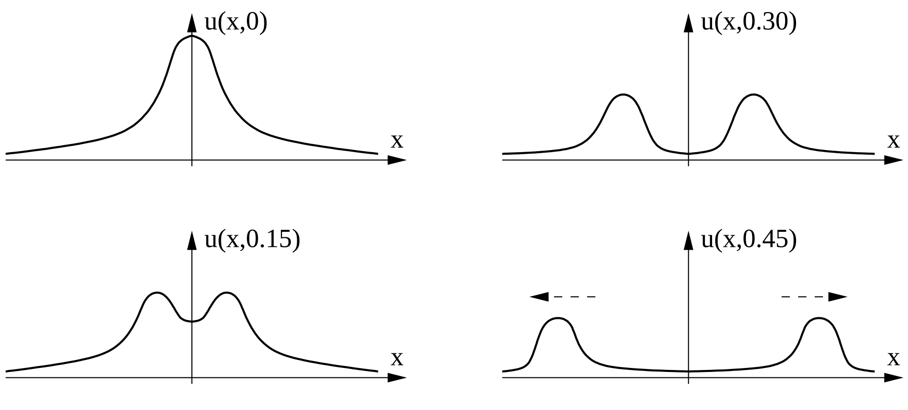

Abbildung 1: Einige „Schnappschüsse“ des Funktionsverlaufs