Mathematik 2 B WB SS 2006

Musterlösung zum 3. Aufgabenblatt

zu 1.) Charakteristisches System:

$$\dot{x} = yz^2 \qquad \dot{y} = -xz^2 \qquad \dot{z} = xy$$

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{-x\cancel{z^2}}{y\cancel{z^2}} \quad \Rightarrow \quad y\dot{y} = -x\dot{x} \quad \Rightarrow \quad y^2 = -x^2 + C_1 \quad \Rightarrow \quad y^2 + x^2 = C_1$$

$$\frac{\dot{z}}{\dot{x}} = \frac{x\cancel{y}}{\cancel{y}z^2} \quad \Rightarrow \quad z^2\dot{z} = x\dot{x} \quad \Rightarrow \quad 2z^3 = 3x^2 + C_2 \quad \Rightarrow \quad 2z^3 - 3x^2 = C_2$$

Allgemeine Lösung:

$$2z^3 - 3x^2 = \Phi(y^2 + x^2)$$

Einsetzen der Anfangsbedingung:

$$16 - 12t^2 = \Phi(8t^2) \overset{8t^2=u}{\Rightarrow} 16 - \frac{3}{2}u = \Phi(u)$$

Rückeinsetzen, spezielle Lösung:

$$2z^3 - 3x^2 = 16 - \frac{3}{2}(x^2 + y^2)$$

Vereinfachen:

$$\underline{\underline{4z^3 - 3x^2 + 3y^2 = 32}} \quad \text{bzw.} \quad z = \sqrt[3]{8 + \frac{3}{4}(x^2 - y^2)}$$

zu 2.) durch partielles Ableiten:

$$\begin{aligned} z_x &= 1 + w'(x^2y^2) \cdot 2xy^2 \qquad &| \cdot x \\ z_y &= 1 + w'(x^2y^2) \cdot 2x^2y \qquad &| \cdot (-y) \end{aligned}$$

$$xz_x - yz_y = x + x^2y^2w'(x^2y^2) - y - x^2y^2w'(x^2y^2)$$

$$\underline{\underline{xz_x - yz_y = x - y}}$$

zu 3.) Einsetzen in die Formel:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\left[\sin^2\pi(x-2t) + \sin^2\pi(x+2t)\right] + \frac{1}{4}\int\limits_{x-2t}^{x+2t} \cos(\pi\tau) - 1 \, d\tau \\ &= \frac{1}{2}\left[\sin^2\pi(x-2t) + \sin^2\pi(x+2t)\right] + \frac{1}{4}\left[\frac{\sin(\pi\tau)}{\pi} - \tau\right]_{x-2t}^{x+2t} \\ &= \frac{1}{2}\left[\sin^2\pi(x-2t) + \sin^2\pi(x+2t)\right] + \frac{1}{4}\left[\frac{\sin\pi(x+2t) - \sin\pi(x-2t)}{\pi} - 4t\right] \end{aligned}$$

für $x = 0$:

$$\begin{aligned} u(0,t) &= \frac{1}{2}\left[\sin^2(2\pi t) + \sin^2(-2\pi t)\right] + \frac{1}{4}\left[\frac{\sin 2\pi t - \sin(-2\pi t)}{\pi} - 4t\right] \\ &= \underline{\underline{\sin^2 2\pi t + \frac{1}{2\pi}\sin 2\pi t - t}} \end{aligned}$$

zu 4.) Homogene Gleichung mit homogenen Randbedingungen→bekannte Ansatzfunktion

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \cos 2kt + B_k \sin 2kt\right] \sin kx$$

Einsetzen der Anfangsbedingungen $u(x,0) = 0$ und $u_t(x,0) = x(\pi - x)$:

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin kx = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{A_k}} = 0 \text{ für alle } k$$

$$u_t(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[-2kA_k \sin 2kt + 2kB_k \cos 2kt\right] \sin kx$$

$$u_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} 2kB_k \sin kx = x(\pi - x)$$

Fourierreihe der Funktion $x(\pi - x)$ nach Termen von $\sin kx$:

$$x(\pi - x) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin kx \quad \Rightarrow \quad \beta_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi x - x^2) \sin kx \, dx = \ldots = \begin{cases} 0 & \text{für } k \text{ gerade} \\ \dfrac{8}{k^3 \pi} & \text{sonst} \end{cases}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2kB_k \sin kx = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin kx \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{B_k}} = \begin{cases} 0 & \text{für } k \text{ gerade} \\ \dfrac{4}{k^4 \pi} & \text{sonst} \end{cases}$$

Lösung:

$$u(x,t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin 2t \sin x + \frac{1}{81} \sin 6t \sin 3x + \frac{1}{625} \sin 10t \sin 5x + \ldots \right)$$

zu 5.) Homogene Gleichung mit inhomogenem Rand. Ansatz: $u(x,t) = v(x,t) + U(x,t)$ mit

$$U(x,t) = u(0,t) + \frac{x}{1} \left[u(1,t) - u(0,t)\right] = 1 - x$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \underline{v(x,t)} &= u(x,t) - U(x,t) = \underline{u(x,t) + x - 1} \\
v_{xx}(x,t) &= u_{xx}(x,t) \\
v_t(x,t) &= u_t(x,t) \\
v(0,t) &= u(0,t) - 1 = 0 \qquad v(1,t) = u(1,t) + 1 - 1 = 0 \\
v(x,0) &= u(x,0) + x - 1 = x - 1
\end{aligned}$$

Aus $u_t = u_{xx}$ folgt durch Einsetzen $v_t = v_{xx}$ als Differentialgleichung mit homogenen Randbedingungen für v, folglich der Ansatz:

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-k^2 \pi^2 t} \sin k\pi x$$

$$v(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin k\pi x = x - 1 \quad \Rightarrow \quad C_k = 2 \int_0^1 (x-1) \sin k\pi x \, dx = \ldots = -\frac{2}{k\pi}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{u(x,t) = -\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} e^{-k^2 \pi^2 t} \sin k\pi x \quad + \quad 1 - x}}$$