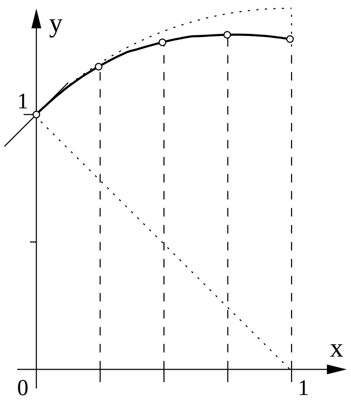
Mathematik 2 B WB SS 2006

Musterlösung zum 1. Aufgabenblatt

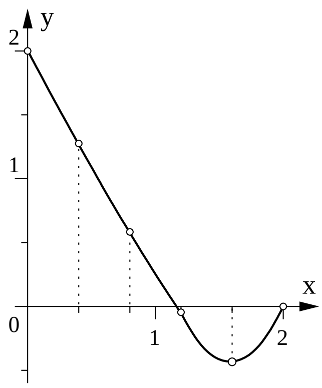
zu 1.) Lösen des AWPs. mittels Taylor-Approximation:

$$1 + yy'' + y'^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_k'' = -\frac{{y_k'}^2 + 1}{y_k}$$

k	x_k	y_k	y_k'	y_k''
0	0	1.0	1.0	-2.0
1	0.25	1.1875	0.5	-1.0526
2	0.5	1.2796	0.2368	-0.8253
3	0.75	1.313	0.0305	-0.7623
4	1	$\underline{\underline{1.2968}}$		



Bsp. 1



Bsp. 2

zu 2.) Lösung mittels Differenzenschema, $h = 0.4$:

$$\frac{1}{h^2}\left(y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}\right) - \frac{1}{h}\left(y_{k+1} - y_{k-1}\right) + x_k^2 y_k = 4 \qquad | \cdot h^2$$

$$\left(y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}\right) - h\left(y_{k+1} - y_{k-1}\right) + h^2 x_k^2 y_k = 4h^2$$

$$y_{k-1}\underbrace{(1+h)}_{1.4} + y_k \underbrace{\left(h^2 x_k^2 - 2\right)}_{\text{von } x_k \text{ abh.}} + y_{k+1}\underbrace{(1-h)}_{0.6} = \underbrace{4h^2}_{0.64}$$

Mit $y_0 = 2$ und $y_4 = 0$ ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccc|c} -1.9744 & 0.6 & 0 & 0 & -2.16 \\ 1.4 & -1.8976 & 0.6 & 0 & 0.64 \\ 0 & 1.4 & -1.7696 & 0.6 & 0.64 \\ 0 & 0 & 1.4 & -1.5904 & 0.64 \end{array}$$

Lösung: $\underline{\underline{y_1 = 1.2719, \quad y_2 = 0.5852, \quad y_3 = -0.05, \quad y_4 = -0.4464.}}$

zu 3.) Eigenwerte:

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 & 2 \\ 1 & -1-\lambda & -2 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \ldots = -\lambda(1+\lambda)^2$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = -1$ (alg. Vfh. 2).

Eigenvektor zu λ_1:

$$\begin{array}{rrr} -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{array} \quad \leadsto \quad \begin{array}{rrr} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ & - & \end{array} \quad \leadsto \quad \vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eigenvektor zu λ_2:

$$\begin{array}{rrr} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{array} \quad \leadsto \quad \begin{array}{rrr} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ & - & \end{array} \quad \leadsto \quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Verallgemeinerter Eigenvektor zu λ_3:

$$\left.\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right. \quad \leadsto \quad \left.\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ & - & & \end{array}\right. \quad \leadsto \quad \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Lösung des Systems:

$$\vec{x}(t) = c_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^0 + c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \left[t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] e^{-t} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2e^{-t} & 2te^{-t} \\ 1 & 0 & e^{-t} \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} \end{pmatrix}}_{\phi(t)} \cdot \vec{c}$$

Bestimmung der Konstanten aus dem Anfangswert: $\phi(0) \cdot \vec{c} = \vec{x}(0)$

$$\left.\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right. \quad \leadsto \quad \left.\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Berechnung von $\quad \vec{x}(1) = \phi(1) \cdot \vec{c} \quad$ sowie $\quad \vec{x}\,'(1) = A \cdot \vec{x}(1)$:

$$\vec{x}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 2e^{-1} & 2e^{-1} \\ 1 & 0 & e^{-1} \\ 0 & e^{-1} & e^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-6e^{-1} \\ 1-3e^{-1} \\ -3e^{-1} \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} -1.2073 \\ -0.1036 \\ -1.1036 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}\,'(1) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-6e^{-1} \\ 1-3e^{-1} \\ -3e^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3e^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ 1.1036 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu 4.) Eigenwerte der Systemmatrix:

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 3 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \ldots = (\lambda+3)(\lambda-1)$$

$\Rightarrow$ Eigenwerte: $\lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = 1.$

Eigenvektor zu λ_1:

$$\begin{matrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{matrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{matrix} 1 & 3 \\ & - \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenvektor zu λ_2:

$$\begin{matrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \end{matrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{matrix} 1 & -1 \\ & - \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Fundamentalmatrix:

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} -3e^{-3t} & e^t \\ e^{-3t} & e^t \end{pmatrix}, \qquad \det\phi(t) = -4e^{-2t}$$

$$\phi^{-1}(t) = -\frac{e^{2t}}{4}\begin{pmatrix} e^t & -e^t \\ -e^{-3t} & -3e^{-3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{3t}/4 & e^{3t}/4 \\ e^{-t}/4 & 3e^{-t}/4 \end{pmatrix}$$

Variatin der Konstanten:

$$\int \phi^{-1}\cdot\vec{b}\,dt = \int \begin{pmatrix} -e^{3t}/4 & e^{3t}/4 \\ e^{-t}/4 & 3e^{-t}/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 4t \end{pmatrix} dt = \int \begin{pmatrix} te^{3t} \\ 3te^{-t} \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} (t-3)e^{3t} \\ 3(t+1)e^{-t} \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\vec{x}(t) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -3e^{-3t} & e^t \\ e^{-3t} & e^t \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c_1 + \ (t-3)e^{3t} \\ c_2 + 3(t+1)e^{-t} \end{pmatrix}}}$$

zu 5.) Es ist folgende Matrix auf positive Definitheit zu prüfen:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 0 \\ 22 & 16 & 6 & 1 \\ 0 & 15 & 22 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{pmatrix} \qquad\qquad |A_1| = 6 > 0\checkmark$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 22 & 16 \end{vmatrix} = 74 > 0\checkmark \quad |A_3| = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 22 & 16 & 6 \\ 0 & 15 & 22 \end{vmatrix} = 1088 > 0\checkmark \quad |A| = 15\cdot|A_3| > 0\checkmark$$

$\Rightarrow$ Die Realteile aller Nullstellen sind negativ.

zu 6.) Der Eigenwert mit algebraischer Vfh. 2 ist reell und negativ. Der Eigenwert 0 hat nur algebraische Vfh. 1 $\quad\Rightarrow\quad$ das System ist stabil, aber nicht asymptotisch stabil.