Mathematik 2 B WB — SS 2006

3. Aufgabenblatt

Abgabe: 3. April 2006

1. Bestimmen Sie die Lösung der quasilinearen Differentialgleichung, welche die angegebene Anfangskurve enthält:
$$yz^2 z_x - xz^2 z_y = xy, \qquad \vec{x}(t) = (2t, -2t, 2)^t$$
Hinweis: Eine integrierbare Gleichung kann man z.B. aus der Kombination $y\dot{y} + z^2\dot{z}$ erhalten.

2. Ermitteln Sie jene quasilineare Differentialgleichung, die die Menge aller Flächen
$$z(x,y) = x + y + w(x^2y^2)$$
beschreibt, wobei w eine beliebige hinreichend glatte Funktion darstellt.

3. Geben Sie die Lösung der Differentialgleichung
$$u_{xx} = \frac{1}{4} u_{tt}$$
mit
$$u(x,0) = \sin^2(\pi x) \qquad \text{und} \qquad u_t(x,0) = \cos(\pi x) - 1$$
nach der Methode von d'Alembert an (ohne Herleitung!) und skizzieren Sie $u(0,t)$ für $0 \leq t \leq 4$.

4. Lösen Sie die Saitenschwingungsgleichung
$$u_{tt} = 4u_{xx} \qquad \text{mit} \qquad \begin{aligned} &u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ &u(x,0) = 0 \\ &u_t(x,0) = x(\pi - x) \end{aligned}$$

5. Lösen Sie die Wärmeleitungsgleichung
$$u_t = u_{xx} \qquad \text{mit} \qquad \begin{aligned} &u(0,t) = 1 \\ &u(1,t) = 0 \\ &u(x,0) = 0 \text{ für } 0 < x \leq 1 \end{aligned}$$