Mathematik 1 C **WS 2005/06**

Lösung
zur 4. Aufgabe

1. Konvergenz: Anwendung des *Leibniz*-Kriteriums mit $a_k = \frac{1}{k(k+1)}$

   - a_k ist Nullfolge:
   $$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 0 \checkmark$$
   - a_k ist monoton fallend:
   $$a_{k+1} - a_k = \frac{1}{(k+1)(k+2)} - \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k-(k+2)}{k(k+1)(k+2)} = \frac{-2}{k(k+1)(k+2)} < 0 \text{ für alle } k > 0 \checkmark$$

   Absolute Konvergenz: Majorantenkriterium
   $$\frac{1}{k(k+1)} \le \frac{1}{k^2} \text{ für alle } k \text{ und } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \text{ konvergiert } \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \text{ konvergiert } \checkmark$$

2. (a)
   $$f(x) = \sqrt[3]{x+\sqrt{x}} = \left(x+\sqrt{x}\right)^{1/3} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}\left(x+\sqrt{x}\right)^{-2/3} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \underline{\underline{\frac{2\sqrt{x}+1}{6\sqrt[3]{\left(x+\sqrt{x}\right)^2}\sqrt{x}}}}$$

   (b)
   $$\left(\frac{1}{x\ln x}\right)' = \underline{\underline{-\frac{\ln x + 1}{x^2 \ln^2 x}}}$$

   (c)
   $$\left(e^{4x}\sin \pi x\right)' = 4e^{4x}\sin\pi x + e^{4x}\cos\pi x \cdot \pi = \underline{\underline{e^{4x}\left(4\sin\pi x + \pi\cos\pi x\right)}}$$

   (d)
   $$\left(\sin\left(\arccos(x)\right)\right)' = \cos\left(\arccos(x)\right) \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = \underline{\underline{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}}$$

3. Wenn der Grenzwert existiert, gilt
   $$\lim \frac{\ln^2 x}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2} = \left(\lim \frac{\ln x}{\left(x-\frac{1}{x}\right)}\right)^2$$

   Der Ausdruck in Klammern ist für $x \to 0$ und $x \to \infty$ von der Form „$\frac{\infty}{\infty}$“ und für $x \to 1$ vom Typ „$\frac{0}{0}$“.
   $$\lim \frac{\ln x}{\left(x-\frac{1}{x}\right)} \overset{\text{De L'H.}}{=} \lim \frac{\frac{1}{x}}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim \frac{1}{\left(x+\frac{1}{x}\right)} = \begin{cases} 0 \text{ für } x \to 0 \\ \frac{1}{2} \text{ für } x \to 1 \\ 0 \text{ für } x \to \infty \end{cases}$$

   Somit ergeben sich durch Quadrieren die gesuchten Grenzwerte 0, $\frac{1}{4}$ und nochmals 0.

4.
$$f(x) = x\sqrt{1-x^3} = x(1-x^3)^{1/2}$$

Mit $-x^3 = z$ ergibt sich mittels *Binomialreihe*

$$(1+z)^{1/2} = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1!}z \pm \ldots = 1 + \frac{1}{2}z \pm \ldots$$

Rückeinsetzen liefert:

$$(1-x^3)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}x^3 \pm \ldots$$

Multiplikation mit x führt auf das Ergebnis

$$x\sqrt{1-x^3} = \underline{\underline{x - \frac{1}{2}x^4 \pm \ldots}}$$

5. Exakte Lösung:

$$\begin{aligned} \sin^2 x + 4\sin x\cos x - \cos^2 x &= 0 \qquad \Big| : \cos^2 x \\ \tan^2 x \;+\; 4\tan x \;-\; 1 &= 0 \end{aligned}$$

Dies ist eine quadratische Gleichung in $\tan x$:

$$\tan x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4+1}$$

$$x = \arctan(-2 \pm \sqrt{5}) = \begin{cases} \underline{\underline{0.2318}} \\ -1.3390 \text{ (nicht im Intervall!)} \end{cases}$$

Newton-Verfahren:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{\sin^2 x_n + 4\sin x_n\cos x_n - \cos^2 x_n}{2\sin x_n\cos x_n + 4\cos^2 x_n - 4\sin^2 x_n - 2\cos x_n(-\sin x_n)} \\ &= x_n - \frac{\sin^2 x_n + 4\sin x_n\cos x_n - \cos^2 x_n}{4\sin x_n\cos x_n + 4\cos^2 x_n - 4\sin^2 x_n} \\ x_0 &= 0 \\ x_1 &= 0 - \frac{0 \;+\; 0 \;-\; 1}{0 \;+\; 4 \;-\; 0} = \frac{1}{4} \\ x_2 &= \frac{1}{4} - \frac{\sin^2(\frac{1}{4}) + 4\sin(\frac{1}{4})\cos(\frac{1}{4}) - \cos^2(\frac{1}{4})}{4\sin(\frac{1}{4})\cos(\frac{1}{4}) + 4\cos^2(\frac{1}{4}) - 4\sin^2(\frac{1}{4})} = \underline{\underline{0.2318}} \end{aligned}$$