

Lösung

zur 3. Aufgabe

1.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 3 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)^2 - 12 - 2(2-\lambda) - 6(1-\lambda) = \dots$$

$$\dots = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 18$$

Eine Nullstelle ist zu erraten, es kommen nur Teiler von 18 in Frage. Erste Nullstelle und damit 1. Eigenwert ist $\lambda_1 = 3$.

$$(\lambda^3 - 5\lambda + 18) \div (\lambda - 3) = \lambda^2 - 2\lambda - 6 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda_{23} = 1 \pm \sqrt{7}}}.$$

Eigenvektor zu $\lambda = 3$:

$$\begin{array}{ccc} -2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{ccc} -2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Mit $x_2 = 3$ und $x_3 = 1$ ist die zweite Zeile erfüllt. Die erste Zeile liefert daraus:

$$-2x_1 - 6 + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{5}{2} \rightarrow \underline{\underline{\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

Eigenvektor zu $\lambda = 1 + \sqrt{7}$:

$$\begin{array}{ccc} -\sqrt{7} & -2 & 1 \\ 0 & 1 - \sqrt{7} & 3 \\ 2 & 2 & 1 - \sqrt{7} \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{ccc} -\sqrt{7} & -2 & 1 \\ 0 & 1 - \sqrt{7} & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Mit $y_2 = -3$ und $y_3 = 1 - \sqrt{7}$ ist die zweite Zeile erfüllt. Die erste Zeile liefert daraus:

$$-\sqrt{7}y_1 + 6 + 1 - \sqrt{7} = 0 \Rightarrow x_1 = -1 + \sqrt{7} \rightarrow \underline{\underline{\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 + \sqrt{7} \\ -3 \\ 1 - \sqrt{7} \end{pmatrix}}}$$

Eigenvektor zu $\lambda = 1 - \sqrt{7}$: Analoge Rechnung liefert:

$$\underline{\underline{\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 - \sqrt{7} \\ -3 \\ 1 + \sqrt{7} \end{pmatrix}}}$$

2.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 4 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(7-\lambda) - 16 = \lambda^2 - 8\lambda - 9 \Rightarrow \lambda_{12} = 4 \pm \sqrt{25}$$

$$\underline{\underline{\lambda_1 = -1}} \quad \underline{\underline{\lambda_2 = 9}}$$

$\lambda = -1$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 9$:

$$\begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$T = (\vec{v}_1 \mid \vec{v}_2) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/5 & 1/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{T \cdot D \cdot T^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2/5 & 1/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = A}}$$

3.

$$\begin{aligned} a_n &= n \left(\frac{n+1}{n-1} - \frac{n-1}{n+1} \right) \\ &= n \left(\frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 + 2n - 1}{n^2 - 1} \right) \\ &= n \left(\frac{4n}{n^2 - 1} \right) \\ &= \frac{4n^2}{n^2 - 1} \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{a}} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2}{n^2 - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{1 - \frac{1}{n^2}} = \frac{4}{1 - 0} = \underline{\underline{4}}$$

$$|a_n - 4| = \left| \frac{4n^2}{n^2 - 1} - 4 \right| = \left| \frac{4n^2 - 4n^2 + 4}{n^2 - 1} \right| = \left| \frac{4}{n^2 - 1} \right| = \frac{4}{n^2 - 1} \quad \text{für } n > 1.$$

$$\begin{aligned} \frac{4}{n^2 - 1} &< \frac{1}{1000} \\ n^2 - 1 &> 4000 \\ n^2 &> 4001 \\ n &> \sqrt{4001} = 63.25 \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{n = 64}}$$

4. Beschränktheit:

$$\frac{1}{5} \leq x_0 = 1 \leq 3$$

$$\frac{1}{5} \leq x_n \leq 3$$

$$-\frac{1}{5} \geq -x_n \geq -3$$

$$\frac{19}{5} \geq 4 - x_n \geq 1$$

$$\frac{5}{19} \leq \frac{1}{4 - x_n} \leq 1$$

$$\frac{1}{5} \leq \frac{5}{19} \leq x_{n+1} \leq 1 \leq 3$$

Monotonie:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{4 - x_n} - x_n = \frac{1 - 4x_n + x_n^2}{4 - x_n}$$

Für $x_n = 4$ ist dieser Ausdruck nicht definiert, für $x_n = 2 \pm \sqrt{3}$ ist er 0.

- Fall 1: $x_n < 2 - \sqrt{3}$, z.B. $x_n = 0 \Rightarrow x_{n+1} = \frac{1}{4}, \uparrow$.

- Fall 2: $2 - \sqrt{3} < x_n < 2 + \sqrt{3}$, z.B. $x_n = 1 \Rightarrow x_{n+1} = \frac{1}{3}, \downarrow$.

- Fall 3: $2 + \sqrt{3} < x_n < 4$, z.B. $x_n = 3.8 \Rightarrow x_{n+1} = 5, \uparrow$.

- Fall 4: $x_n > 4 \Rightarrow x_{n+1} < 0, \downarrow$.

Grenzwert:

$$x^* = \frac{1}{4 - x^*} \Rightarrow 4x^* - x^{*2} = 1 \Rightarrow x^* = 2 \pm \sqrt{3}$$

Nachdem die Folge durch 3 nach oben beschränkt ist, kommt als Grenzwert nur der *kleinere* Wert in frage:

$$\underline{\underline{x^* = 2 - \sqrt{3} = 0.268}}$$

5.

$$\sum \binom{k}{2} \frac{k^2}{2^k} = \sum \underbrace{\frac{k(k-1)}{1 \cdot 2} \frac{k^2}{2^k}}_{a_k}$$

Quotientenkriterium:

$$\underline{\underline{\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}}} = \frac{\frac{(k+1)k}{1 \cdot 2} \cdot \frac{(k+1)^2}{2 \cdot 2^k}}{\frac{k(k-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{k^2}{2^k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)^3}{2(k-1)k^2} = \dots$$

$$\dots = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^3 + 3k^2 + 3k + 1}{2k^3 - 2k^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{3}{k} + \frac{3}{k^2} + \frac{1}{k^3}}{2 - \frac{2}{k}} = \frac{1}{2} \quad \underline{\underline{\leq 1}}$$

$\Rightarrow$ Die Reihe ist konvergent.