Mathematik 1 C **WS 2005/06**

Lösung
zur 1. Aufgabe

1. Um die Gleichung auf die Standardform $z^2 + pz + q = 0$ zu bringen, ist sie zunächst durch $(1+i)$ zu dividieren:

$$z^2 + \frac{5i-3}{1+i}z + \frac{16i-18}{1+i} \quad = \quad z^2 + \underbrace{(1+4i)}_{p}z + \underbrace{17i-1}_{q} \quad = \quad 0$$

Durch Einsetzen in die Formel zur Lösung der quadratischen Gleichung ergeben sich:

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= -\frac{1+4i}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1+4i}{2}\right)^2 - 17i + 1} \\ &= -\frac{1+4i}{2} \pm \sqrt{\frac{1+8i-16}{4} - 17i + 1} \\ &= -\frac{1+4i}{2} \pm \sqrt{\frac{-15+8i-68i+4}{4}} \\ &= -\frac{1+4i}{2} \pm \frac{\sqrt{-11-60i}}{2} \end{aligned}$$

Als Nebenrechnung wird die Wurzel gezogen, wozu die Zahl $-11 - 60i$ zunächst auf Polarkoordinaten umzuformen ist:

$$r = |-11-60i| = \sqrt{11^2 + 60^2} = \sqrt{3721} = 61$$

$$\varphi = \arctan\frac{-60}{-11} = 1.3895 + \pi = 4.5311$$

$$\Rightarrow \sqrt{-11-60i} = \begin{cases} \sqrt{61}\left(\cos\frac{4.5311}{2} + i\,\sin\frac{4.5311}{2}\right) & = -5+6i \\ \sqrt{61}\left(\cos\frac{4.5311+2*\pi}{2} + i\,\sin\frac{4.5311+2*\pi}{2}\right) & = 5-6i \end{cases}$$

In $z_{1,2}$ eingesetzt ergeben sich so insgesamt die beiden möglichen Lösungen

$$\underline{\underline{z_1}} = -\frac{1+4i}{2} + \frac{-5+6i}{2} = \frac{-6+2i}{2} = \underline{\underline{-3+i}}$$

$$\underline{\underline{z_2}} = -\frac{1+4i}{2} - \frac{-5+6i}{2} = \frac{4-10i}{2} = \underline{\underline{2-5i}}$$

Die faktorisierte Darstellung der Gleichung lautet (zur Vervollständigung erweitert mit dem zu Beginn gekürzten Faktor):

$$(1+i)(z-z_1)(z-z_2) = (1+i)\underline{\underline{(z+3-i)(z-2+5i) = 0}}$$

2. Zunächst werden die Zahlen in Polarform umgerechnet:

$$r_z = \sqrt{0.5^2 + 1.2^2} = 1.3 \qquad \varphi_z = \arctan\frac{-1.2}{0.5} = -1.176$$

$$r_w = \sqrt{2.1^2 + 2^2} = 2.9 \qquad \varphi_w = \arctan\frac{2}{-2.1} = -0.761 + \pi = 2.3806$$

Für $\bar{z}$ ergibt sich der selbe Betrag wie für z, beim Argument ändert sich aber das Vorzeichen!
Damit ergeben sich für $u := \bar{z}^7 w^3$:

$$\begin{aligned} r_u &= r_z^7 \cdot r_w^3 &&= 1.3^7 \cdot 2.9^3 &&= 153.0374 \\ \varphi_u &= 7 \cdot (-\varphi_z) + 3 \cdot \varphi_w &&= 7 \cdot 1.176 + 3 \cdot 2.3806 = 15.3738 \end{aligned}$$

Wenn man nun von φ_u mehrmals 2π abzieht, ergibt sich für das Argument der etwas handlichere Wert $\varphi_u = 2.8074$
Nun läßt sich der Realteil aus den Polarkoordinaten leicht bestimmen:

$$\underline{\underline{\mathrm{Re}\,(\bar{z}^7 w^3)}} = r_u \cos\varphi_u = 153.0374 \cos(2.8074) = \underline{\underline{-144.5707}}$$

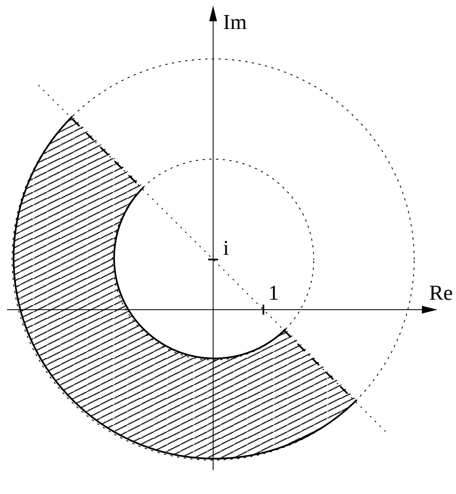
Für $v := \frac{z^7}{w^3}$ ergeben sich:

$$\begin{aligned} r_v &= \frac{r_z^7}{r_w^3} &&= \frac{1.3^7}{2.9^3} &&= 0.2573 \\ \varphi_v &= 7 \cdot \varphi_z - 3 \cdot \varphi_w &&= -15.3738 &&\widehat{=} -2.8074 \end{aligned}$$

und somit:

$$\underline{\underline{\mathrm{Im}\left(\frac{z^7}{w^3}\right)}} = r_v \sin\varphi_v = 0.2573 \sin(-2.8074) = \underline{\underline{-0.0844}}$$

3. Schnitt einer Halbebene mit einem Kreisring:



Für $z = 1 + 2i$ gilt: $\mathrm{Re}\, z + \mathrm{Im}\, z = 1 + 2 = 3 \not< 1$. Die Zahl liegt damit <u>nicht</u> im gesuchten Bereich! (Darüberhinaus ist mit $||z - i|| = \sqrt{2}$ auch die zweite Forderung nicht erfüllt)

4. - Für die Zuteilung des Brenners gibt es genau 11 Möglichkeiten.
   - Zu jeder dieser 11 Möglichkeiten gibt es $\binom{10}{2}$ Möglichkeiten, aus den restlichen 10 Personen genau zwei auszuwählen, die einen der Mörser zugeteilt bekommen.
   - Zu jeder der bisherigen Möglichkeiten gibt es $\binom{8}{5}$ Möglichkeiten, Personen für die verbleibenden 5 Geräte auszuwählen.

   Damit ergeben sich insgesamt:

   $$11 \cdot \binom{10}{2} \cdot \binom{8}{5} = 11 \cdot 45 \cdot 56 = \underline{\underline{27720 \quad \text{Möglichkeiten}}}$$

   Variante:

   - Acht Personen auswählen: $\binom{11}{8}$ Möglichkeiten.
   - Diese Acht Personen den acht Geräten zuordnen (wobei auch gleiche Geräte zunächst unterschieden werden): 8! Möglichkeiten.
   - Anzahl möglicher Zuordnungen von 2 bzw. 5 nicht unterscheidbaren Geräten auf zwei bzw. fünf (fix gewählte) Personen: 2! bzw. 5!

   $$\frac{\binom{11}{8} \cdot 8!}{2! \cdot 5!} = \frac{165 \cdot 40320}{2 \cdot 120} = \underline{\underline{27720}}.$$

5. Auflistung der Möglichkeiten:

   - Zur Auswahl von 5 Tabletten in der Schreibweise (rot,weiß) gibt es die Möglichkeiten $(5, 0)$, $(4, 1)$, $(3, 2)$ und $(2, 3)$, also insgesamt 4.
   - Auswahl von 4 Tabletten: $(4, 0)$, $(3, 1)$, $(2, 2)$ und $(1, 3)$, auch wiederum 4 Möglichkeiten.
   - 3 Tabletten: $(3, 0) \ldots (0, 3) \to 4$ Mgl.
   - 2 Tabletten: $(2, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 2) \to 3$ Mgl.
   - 1 Tablette: entweder rot oder weiß, also 2 Mgl.
   - Nachdem *bis zu* fünf Tabletten zu wählen waren, gibt es noch eine weitere schlaue Möglichkeit, nämlich *gar keine* Tablette auszuwählen.

   Die Gesamtzahl beträgt also insgesamt (je nach Auffassung der Aufgabenstellung) $\underline{\underline{\text{17 bzw. 18 Möglichkeiten}}}$.

   Die hier gezeigte Vorgangsweise eignet sich nur für kleine Zahlen!

   Für Interessierte sei hier zusätzlich (ohne Beweis) eine allgemeine Lösung angegeben, wobei aus einem Sortiment von n Tabletten der einen und m Tabletten der anderen Farbe bis zu k Tabletten ausgewählt werden sollen. Die Anzahl der Möglichkeiten beträgt dann

   $$\sum_{i=1}^{k+1} i - \sum_{i=1}^{k-m} i - \sum_{i=1}^{k-n} i + \sum_{i=1}^{k-m-n+1} i \qquad \left(\text{mit } \sum_{i=1}^{s} i = \frac{s(s+1)}{2} \text{ für } s \geq 0 \right)$$

   Dabei ist der Fall „nichts wählen“ mitgezählt worden. Im gegebenen Bsp. waren $m = 3$, $n = 35$ und $k = 5$ gegeben. Wir erhalten also durch Einsetzen ebenfalls

   $$\sum_{i=1}^{6} i - \sum_{i=1}^{2} i - \sum_{i=1}^{-30} i + \sum_{i=1}^{-32} = 21 - 3 - 0 + 0 = 18$$