

Lösung zur 3. Aufgabe

1.

$$\begin{aligned}
 n \left(\sqrt{2n^2 + 3} - \sqrt{2n^2 - 1} \right) &= \frac{n \left(\sqrt{2n^2 + 3} - \sqrt{2n^2 - 1} \right) \left(\sqrt{2n^2 + 3} + \sqrt{2n^2 - 1} \right)}{\sqrt{2n^2 + 3} + \sqrt{2n^2 - 1}} = \\
 &= \frac{n \left[(2n^2 + 3) - (2n^2 - 1) \right]}{\sqrt{2n^2 + 3} + \sqrt{2n^2 - 1}} = \frac{n \cdot 4}{\sqrt{2n^2 + 3} + \sqrt{2n^2 - 1}} = \frac{\cancel{n} \cdot 4}{\cancel{n} \left[\sqrt{2 + 3/n^2} + \sqrt{2 - 1/n^2} \right]} \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{2 + 3/n^2} + \sqrt{2 - 1/n^2}} &= \frac{4}{\sqrt{2 + \lim_{n \rightarrow \infty} (3/n^2)} + \sqrt{2 - \lim_{n \rightarrow \infty} (1/n^2)}} = \\
 &= \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2} = \boxed{1,4142136}. \quad a_1 = 1,2361; \quad a_{10} = 1,4107; \quad a_{100} = 1,4142.
 \end{aligned}$$

2. Quotientenkriterium:

$$\begin{aligned}
 \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{(k+1)^{(k+1)}}{4^{(k+1)}(k+1)!}}{\frac{k^k}{4^k k!}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{(k+1)(k+1)^k}{4 \cdot 4^k (k+1)k!}}{\frac{k^k}{4^k k!}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{(k+1)^k}{4}}{\frac{k^k}{1}} = \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)^k}{4 \cdot k^k} = \frac{1}{4} \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{(k+1)}{k} \right)^k = \frac{1}{4} \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{k} \right)^k}_{\rightarrow e} = \frac{e}{4}
 \end{aligned}$$

$e/4 = 0,677 < 1 \rightarrow$ Die Reihe $\sum a_k$ ist konvergent.

3. • Auflösen des Betrags:

$$|1+x| = \begin{cases} 1+x & \text{für } 1+x \geq 0, \quad \text{also für } x \geq -1, \\ -1-x & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1+x - \frac{1}{1+x^2} & \text{für } x \geq -1, \\ -1-x - \frac{1}{1+x^2} & \text{für } x < -1. \end{cases}$$

• Definitionsbereich (Achtung auf Division durch Null):

$$1+x^2 \neq 0 \text{ ist für alle } x \in \mathbb{R} \text{ erfüllt. } \boxed{\mathcal{D} = \mathbb{R}}$$

• rechter Teil der Funktion ($x \geq -1$):

$$f(x) = 1+x - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x+x^2+x^3}{1+x^2}$$

– Nullstellen:

$$f(x) = 0 \iff x+x^2+x^3 = 0 \iff x(1+x+x^2) = 0$$

Einziges **Nullstelle** bei $x = 0$ liegt auch im zulässigen Bereich ($x \geq -1$)!

$$\boxed{\mathcal{N}_0 = (0/0)}$$

– Extremwerte:

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1+2x+2x^2+x^4}{(1+x^2)^2}$$

Der Zähler wird aber nie null, wie man leicht erkennt, wenn man umformt:

$$1+2x+2x^2+x^4 = (1+x)^2 + x^2 + x^4$$

Es werden nur positive Zahlen addiert, die nicht alle gleichzeitig 0 werden können.
Es gibt also **keine lokalen Extrema**.

- Wendepunkte:

$$f''(x) = \frac{2(1 - 2x^2 - 3x^4)}{(1 + x^2)^4} = \frac{2(1 - 3x^2)(1 + x^2)}{(1 + x^2)^4} = \frac{2(1 - 3x^2)}{(1 + x^2)^3}$$

$$f''(x) = 0 \iff (1 - 3x^2) = 0 \iff x = \pm\sqrt{1/3} = \pm 0,577$$

Zwei **Wendepunkte** im zulässigen Bereich: $\mathcal{W}_1 = (0, 577/0, 827)$, Tangentensteigung: 1, 650,
und $\mathcal{W}_2 = (-0, 577/-0, 327)$ T.s.: 0, 350

- Asymptotisches Verhalten (Asymptote der Form $y = kx + d$):

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + x + x^2}{1 + x^2} = \dots = 1.$$

$$d = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{1 + x^2}\right) = 1.$$

Asymptote für $x \rightarrow \infty$: $y = x + 1$

- linker Teil der Funktion ($x < -1$):

$$f(x) = -1 - x - \frac{1}{1 + x^2} = -\frac{2 + x + x^2 + x^3}{1 + x^2}$$

- Nullstellen:

$$f(x) = 0 \iff 2 + x + x^2 + x^3 = 0$$

-1 eingesetzt ergibt den Wert +1; -2 eingesetzt ergibt -4. Dazwischen wird sich also eine Nullstelle befinden: Newton-Verfahren mit Startwert $x_o = -1,5$ für die erste Nullstelle liefert:

$$x_1 = x_o - \frac{2 + x_o + x_o^2 + x_o^3}{1 + 2x_o + 3x_o^2} = -1,36842$$

$$x_2 = \dots = -1,3534; \quad \mathbf{x_3 = -1,3532}$$

Polynomdivision: $(x^3 + x^2 + x + 2) : (x + 1,3532) = (x^2 - 0,3532x + 1,478)$ liefert keine weiteren (reellen) Nullstellen. $\mathcal{N}_1 = (-1,3532/0)$

- Extremwerte:

$$f'(x) = -1 + \frac{2x}{(1 + x^2)^2} = -\frac{1 - 2x + 2x^2 + x^4}{(1 + x^2)^2}$$

Wiederum wird der Zähler nie null, es gibt also auch hier **keine lokalen Extrema**.

- Wendepunkte:

$$f''(x) = \frac{2(1 - 2x^2 - 3x^4)}{(1 + x^2)^4} = \dots = \frac{2(1 - 3x^2)}{(1 + x^2)^3}$$

$$f''(x) = 0 \iff (1 - 3x^2) = 0 \iff x = \pm\sqrt{1/3} = \pm 0,577$$

Beide Punkte liegen *außerhalb* des zulässigen Bereichs ($x < -1$)!

- Asymptotisches Verhalten:

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{2 + x + x^2 + x^3}{x + x^3} = \dots = -1.$$

$$d = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-1 - \frac{1}{1 + x^2}\right) = -1.$$

Asymptote für $x \rightarrow -\infty$: $y = -x - 1$

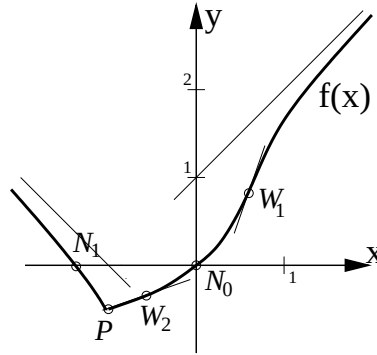
- Untersuchung des kritischen Punktes $x = -1$:

- Stetigkeit:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1 + (-1) - \frac{1}{1 + (-1)^2} = -0,5$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -1 - (-1) - \frac{1}{1 + (-1)^2} = -0,5$$

Die Werte stimmen überein, die Funktion ist also auch im kritischen Punkt (und somit in ganz $\mathbb{R}$) stetig.



– Differenzierbarkeit:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = (\text{in 1. Glg. einges.}) = 0,5$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) = (\text{in 2. Glg. einges.}) = -1,5$$

Die Werte stimmen nicht überein, die Funktion ist damit für $x = -1$ nicht differenzierbar!

Aus den beiden Werten folgt aber (die Funktion ist vor $x = -1$ fallend, danach ansteigend):

Der Punkt $\boxed{P = (-1, -0,5)}$ ist ein (lokales) **Minimum** der Funktion $f(x)$!

- Symmetrie: Für $|x| < 1$ genügt es schon, die 1. Funktion zu betrachten:

$$f(-x) = 1 + (-x) - \frac{1}{1 + (-x)^2} = 1 - x - \frac{1}{1 + x^2} \neq \pm f(x).$$

Die Funktion ist nicht symmetrisch.

- Monotonie, Konvexität:

Bereich:	$-\infty \dots -1$	$-1 \dots -0,577$	$-0,577 \dots 0,577$	$0,577 \dots \infty$
Monotonie:	fallend	steigend	steigend	steigend
Konvexität:	konkav	konkav	konvex	konkav

4. Für $x \rightarrow 0$ liegt der unbestimmte Ausdruck „ $\frac{0}{0}$ “ vor.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^{\sqrt{x}} - \sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overset{\rightarrow 1}{\cos x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{e^{\sqrt{x}}} = \mathbf{2}.$$

Für $x \rightarrow \pi$ liegt kein unbestimmter Ausdruck vor, der Grenzwert ist damit 0 (durch Einsetzen)!

5. Die Reihe für $\cos(Ax)$ kann direkt durch Einsetzen in die bekannte cos-Reihe gewonnen werden:

$$\cos(Ax) = 1 - \frac{(Ax)^2}{2!} + \frac{(Ax)^4}{4!} \dots = 1 - \frac{A^2 x^2}{2} + \frac{A^4 x^4}{24} \dots$$

Die Entwicklung von $\frac{4}{x^2+4}$ erfolgt auf dem üblichen Wege:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \frac{4}{x^2+4}, & y_1(0) &= 1; \\ y_1'(x) &= \frac{-8x}{(x^2+4)^2}, & y_1'(0) &= 0; \\ y_1''(x) &= \frac{8(3x^2-4)}{(x^2+4)^3}, & y_1''(0) &= -\frac{1}{2}; \\ y_1'''(x) &= \frac{96x(4-x^2)}{(x^2+4)^4}, & y_1'''(0) &= 0; \\ y_1^{(4)}(x) &= \frac{96(16-40x^2+5x^4)}{(x^2+4)^5}, & y_1^{(4)}(0) &= \frac{3}{2}; \end{aligned}$$

$$\frac{4}{x^2+4} = 1 - \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{3x^4}{2 \cdot 4!} \dots = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{16} \dots$$

Koeffizientenvergleich liefert (jeweils links beginnend):

(konst.): $1 = 1 \checkmark$

$$(x^2): \quad \frac{A^2}{2} = \frac{1}{4} \implies \boxed{A = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

(x^4): $\frac{A^4}{24} = \frac{1}{16}$ nicht mehr erfüllbar.

Für $A = \frac{1}{\sqrt{2}}$ stimmen die beiden Reihen bis zu Termen 3. Ordnung überein. Der Fehler an der Stelle $x = 1$ ergibt sich damit aus: $|\cos(\frac{1}{\sqrt{2}}) - \frac{4}{1+4}| = \mathbf{0,0398}$