Mathematik 1 C　　　　WS 2003/04

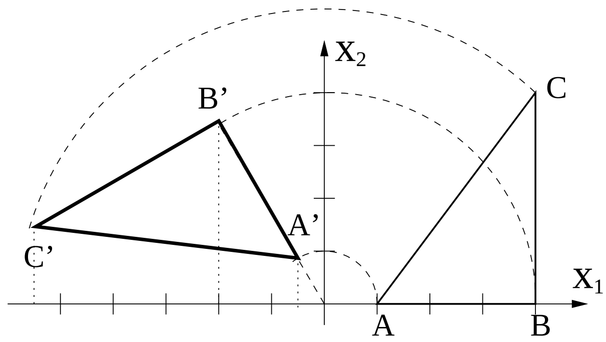
Lösung
zur 2. Aufgabe

1. $\vec{v_1}$ und $\vec{v_2}$ sind linear unabhängig, da bei Übereinstimmung der 1. Komponenten die 2. Komponente von $\vec{v_2} = -2$ sein müßte.
$\vec{v_3} \in \text{span}\,(\vec{v_1}, \vec{v_2})$, denn es gilt z.B. $\vec{v_3} = -1 \cdot \vec{v_1} - 1 \cdot \vec{v_2}$
Für $a \neq 0$ ist $\vec{v_4} \notin \text{span}\,(\vec{v_1}, \vec{v_2})$, da aus
$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2a \end{pmatrix}$$
folgt:
$$\begin{array}{rcl} \lambda_1 - \lambda_2 = 1 & \rightarrow & \lambda_1 = 1 + \lambda_2 \\ 2\lambda_1 - 3\lambda_2 = 1 & \hookrightarrow & \lambda_2 = 1 \\ & \rightarrow & \lambda_1 = 2 \\ 2a + 0a = -2a & \rightarrow & \lightning \end{array}$$
Eine mögliche **Basis** wäre also z.B. $\{\mathbf{\vec{v_1}}, \mathbf{\vec{v_2}}, \mathbf{\vec{v_4}}\}$, und die **Dimension** des erzeugten Unterraums ist damit **3**.

Für $a = 0$ ist die letzte Gleichung allerdings erfüllt, und damit $\vec{v_4} \in \text{span}\,(\vec{v_1}, \vec{v_2})$. In diesem Fall ist $\{\mathbf{\vec{v_1}}, \mathbf{\vec{v_2}}\}$ eine mögliche **Basis**, und die **Dimension** des erzeugten Unterraums ist **2**.
Die Aufgabe ist also nur für den Spezialfall $\mathbf{a = 0}$ vollständig lösbar. In diesem Fall gilt z.B.: $\mathbf{\vec{v_4} = \vec{v_1} - \vec{v_3}}$.

2. (a)
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 & - (-2)(-4) \\ (-2)(-3) & - \quad 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot (-4) & - \quad 1 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-5} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{-5} \end{pmatrix}$$
(b)
$$\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle = (-\vec{b} \times \vec{a}, \vec{c}) = \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = 3 \cdot 5 + 0 \cdot 0 + 5 \cdot (-1) = \mathbf{10}$$
(c) $\|\vec{a}\| = \sqrt{34}$, $\quad \vec{b} - \vec{c} = (-1, 1, -1)^t$, $\quad \|\vec{b} - \vec{c}\| = \sqrt{3}$, $\quad (\vec{a}, \vec{b} - \vec{c}) = -4$.
Mit $\propto = \sphericalangle \{\vec{a}, \vec{b} - \vec{c}\}$ gilt:
$$\cos(\propto) = \frac{-4}{\sqrt{34} \cdot \sqrt{3}} = -0,396 \quad \rightarrow \quad \propto = \mathbf{1,978}.$$

3.
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-0{,}5} & \mathbf{-0{,}866} \\ \mathbf{0{,}866} & \mathbf{-0{,}5} \end{pmatrix}$$
Für die Koordinaten der gedrehten Punkte A', B' und C' des Dreiecks erhält man damit
$$\mathbf{A'} = \begin{pmatrix} -0{,}5 & -0{,}866 \\ 0{,}866 & -0{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-0{,}5} \\ \mathbf{0{,}866} \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{B'} = \ldots = \begin{pmatrix} \mathbf{-2{,}0} \\ \mathbf{3{,}464} \end{pmatrix} \quad \mathbf{C'} = \ldots = \begin{pmatrix} \mathbf{-5{,}464} \\ \mathbf{1{,}464} \end{pmatrix}$$



4.

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -2 \\ 5 & -4-\lambda & -6 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = -(\lambda-1)(\lambda+2)^2$$

$$\Rightarrow \qquad \boldsymbol{\lambda_1 = 1} \quad (\textbf{alg.Vielfachh.1}), \qquad \boldsymbol{\lambda_{2,3} = -2} \quad (\textbf{alg.Vfh.2})$$

$\lambda = 1:$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 5 & -5 & -6 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad EV(1) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (\textbf{geom.Vfh.1})$$

$\lambda = -2:$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 5 & -2 & -6 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad EV(-2) = \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{-4} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix} \quad (\textbf{geom.Vfh.1})$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 5 & -2 & -6 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \widetilde{EV}(-2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

5.

$$\mathcal{P}(\lambda) = 36 - 13\lambda + \lambda^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 9, \quad \lambda_2 = 4 \quad \Rightarrow \quad EV_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad EV_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overline{EV_1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overline{EV_2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{9} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{4} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{2/\sqrt{5}} & \mathbf{1/\sqrt{5}} \\ \mathbf{1/\sqrt{5}} & \mathbf{-2/\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{TDT^{-1}} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 18/\sqrt{5} & 4/\sqrt{5} \\ 9/\sqrt{5} & -8/\sqrt{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40/5 & 10/5 \\ 10/5 & 25/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{8} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{5} \end{pmatrix} \quad \checkmark$$