Lösung
zur 1. Aufgabe

1. $z = 12 - 5i, \qquad |z| = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13,$
   $\arg(z) = \arctan(-\frac{5}{12}) = -0.395$

   $w = -3 + 4i, \quad |w| = |\bar{w}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$
   $\arg(w) = \arctan(-\frac{4}{3}) = -0.927 + \pi = 2.214$
   $\arg(\bar{w}) = -2.214$

   $$\mathbf{u} := \frac{z^4 \bar{w}^7}{w^{12}}$$

   $$|\mathbf{u}| = \frac{|z|^4 |\bar{w}|^7}{|w|^{12}} = \frac{13^4 5^7}{5^{12}} = \frac{13^4}{5^5} = \mathbf{9.140}$$

   $$\mathbf{arg(u)} = 4\arg(z) + 7\arg(\bar{w}) - 12\arg(w) = -43,65 = \mathbf{0.332} \quad (7 \cdot 2\pi addiert)$$

   $$a = |u|\cos(\arg(u)) = 8.64, \qquad b = |u|\sin(\arg(u)) = 2.98$$

   $$\boxed{\mathbf{u = 8.64 + 2.98\ i}}$$

2. $z^6 + (5-2i)^3 z = z\left(z^5 + (5-2i)^3\right) = 0$
   Es gibt 2 Möglichkeiten, daß dieses Produkt den Wert 0 ergibt:

   - $z^5 + (5-2i)^3 = 0$, also: $z = \left(\overbrace{-(5-2i)}^{w}\right)^{3/5}$
     $w = -5 + 2i, \quad |w| = r = 5.385, \quad \arg(w) = \varphi = 2.761$
     Damit erhalten wir für $k = 0 \ldots 4$:

     $$z_k = r^{3/5}\left(\cos\left(\frac{3\varphi + 2k\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{3\varphi + 2k\pi}{5}\right)\right)$$

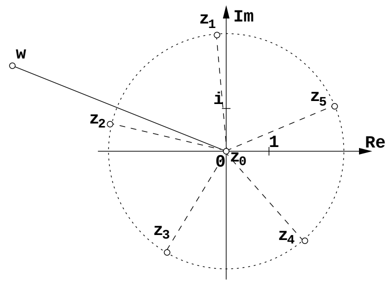
     $\mathbf{z_0} = 2.746\,(\cos(1.657) + i\sin(1.657)) = \mathbf{-0.236 + 2.736i}$
     $\mathbf{z_1} = 2.746\,(\cos(2.913) + i\sin(2.913)) = \mathbf{-2.675 + 0.622i}$
     $\mathbf{z_2} = \ldots = \mathbf{-1.417 - 2.352i}$
     $\mathbf{z_3} = \ldots = \mathbf{1.8 - 2.074i}$
     $\mathbf{z_4} = \ldots = \mathbf{2.529 + 1.069i}$

     Anmerkung: Rechnung mit

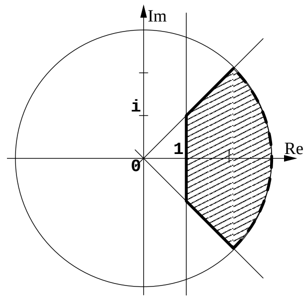
     $$z_k = r^{3/5}\left(\cos\left(\frac{3}{5}(\varphi + 2k\pi)\right) + i\sin\left(\frac{3}{5}(\varphi + 2k\pi)\right)\right)$$

     liefert die selben Werte!

   - $z = 0$, also: $\mathbf{z_5 = 0 + 0i}$



Aufg. 2: Nullstellen



Aufg. 3: Bereich

3. • $0 \le \mathrm{Re}(z-1) \quad \Longrightarrow \quad 0 \le x-1 \quad \Longrightarrow \quad 1 \le x$
   • $|z| < 3 \ldots$ Kreis mit Radius 3 um den Ursprung.
   • $|\arg(z)| = |\varphi| \le \frac{\pi}{4} \quad \Longrightarrow \quad -\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$

4. Es gibt zunächst $3! = 6$ Möglichkeiten, die 3 *Büchergruppen* "D","E" und "F" anzuordnen.
   In jeder dieser Anordnungen können die Bücher *in* den Gruppen vertauscht werden, was jeweils unterschiedliche Anordnungen ergibt:
   "D" : $5! = 120$ Mgl.
   "E" : $3! = 6$ Mgl.
   "F" : $2! = 2$ Mgl.
   Also insgesamt: $6 \cdot 120 \cdot 6 \cdot 2 = \boxed{\textbf{8640 mögliche Anordnungen}}$

5. Insgesamt gibt es (incl. der *verbotenen* Substanzen X und Y) folgende Mischungs-Möglichkeiten:

$$\underbrace{\binom{5}{2}}_{\text{2Subst.}} + \underbrace{\binom{5}{3}}_{\text{3S.}} + \underbrace{\binom{5}{4}}_{\text{4S.}} + \underbrace{\binom{5}{5}}_{\text{5S.}} = \frac{5 \cdot \cancel{4}^2}{1 \cdot \cancel{2}} + \frac{5 \cdot \cancel{4}^2 \cdot \cancel{3}}{1 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3}} +$$

$$+ \frac{5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}}{1 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4}} + \frac{\cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{5}} = 10 + 10 + 5 + 1 = \mathbf{26}$$

Davon ziehen wir die Anzahl von möglichen Mischungen ab, die *beide* Substanzen X und Y enthalten, das sind (X und Y fix, sowie 0 bis 3 der restlichen) :

$$\underbrace{\binom{3}{0}}_{\text{nurXundY}} + \underbrace{\binom{3}{1}}_{\text{1zus.Subst.}} + \underbrace{\binom{3}{2}}_{\text{2zus.S.}} + \underbrace{\binom{3}{3}}_{\text{alle5S.}} = 2^3 = 8$$

(aus dem binomischen Lehrsatz)

Also ergibt sich insgesamt für die mögliche Anzahl von zulässigen Mischungen: $\boxed{26 - 8 = \textbf{18 Mischungen}}$