Mathematik 1 C — WS 2005/06

6. Übungsblatt

Martin Raindl: raindl@opt.math.tu-graz.ac.at

<u>Differentialrechnung</u>

1. Zeigen Sie, daß die Funktion $f(x) = |x|$ an der Stelle $x_0 = 0$ zwar stetig, aber nicht differenzierbar ist.

2. Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die folgende Funktion differenzierbar?

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \leq 0 \\ x^a & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

3. Differenzieren Sie folgende Funktionen:

   (a) $f(x) = (x^2+3)(x^3-2x)$ mit der Produktregel

   (b) $f(x) = \tan x \; (= \frac{\sin x}{\cos x})$ mit der Quotientenregel

   (c) $f(x) = \cos^4 x$ mit Hilfe der Kettenregel

   (d) $f(x) = \left(\dfrac{2+3x}{1-2x}\right)^3$ zunächst mit Hilfe der Kettenregel und dann durch Ausmultiplizieren und Verwendung der Quotientenregel.

4. Finden Sie eine geeignete Methode, um folgende Funktionen nach x zu differenzieren:

   (a) $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

   (b) $y = \sqrt{1-x^2}$

   (c) $y = x\sqrt{1-\sin x}$

   (d) $y = x^{\sqrt{x}}$

   (e) $y = \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^4$

5. Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$

   (b) $\lim\limits_{x\to 1} (1-x) \cdot \tan \frac{\pi}{2} x$

   (c) $\lim\limits_{x\to 0} x \cdot \ln x$

   (d) $\lim\limits_{x\to\infty} x \cdot (1 - \cos \frac{1}{x})$

   (e) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$

   (f) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\left(\frac{1}{x-1}\right)}$

6. Man bestimme die impliziten Ableitungen und berechne daraus $\frac{dy}{dx}$:

   (a) $F(x,y) = y \cdot e^x + x \cdot e^y = 0$

   (b) $F(x,y) = (x-1)^2 + (y-4)^2 = 9$

   (c) $F(x,y) = x^2 + x^2 y + y^2 = 0$

   (d) $F(x,y) = \sin y - x = 0$

7. Entwickeln Sie folgende Funktionen in Taylorreihen:

   (a) $f(x) = (1+x)^a$ im Punkt $x_0 = 0$ und für $|x| < 1$.

   (b) $f(x) = e^{-x}$ im Punkt $x_0 = 0$.

   (c) $f(x) = e^{-x}$ im Punkt $x_0 = 2$.

   (d) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ $(|x| < 1)$ sowie $f'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ $\quad x_0 = 0$.

   (e) $f(x) = \dfrac{x^2+x}{\sin x}$ (die ersten drei Glieder, $x_0 = 0$).

   (f) $f(x) = \dfrac{\ln(x^2+1)}{x^2}$ $\quad x_0 = 0$.

8. Finden Sie mit dem Newtonverfahren Näherungslösungen für alle Nullstellen folgender Funktionen:

   (a) $y = x^2 - 3$

   (b) $y = x^3 + x^2 + 7x - 3$

   (c) $y = \sin x - \frac{x}{2}$ im Intervall $(0, 2\pi]$

9. Verwenden Sie die regula falsi, um zu Näherungslösungen folgender Gleichungen zu gelangen:

   (a) $e^x - 5x + 1 = 0$

   (b) $\sin x - \frac{x}{2} = 0$

   (c) $\ln x - x + 2 = 0$

10. Diskutieren Sie folgende Funktionen:

    (a) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x-1}$

    (b) $f(x) = x \ln x^2$

    (c) $f(x) = \sqrt{1 - \cos x}$

Zusammenfassung Kurvendiskussion

1. Definitionsbereich, Nullstellen, Symmetrieeigenschaften.
2. Extremwerte: Minima, Maxima, Werte an diesen Stellen.
3. Wendepunkte.
4. Tangenten: Untersuchung in wichtigen Punkten.
5. Differenzierbarkeit an kritischen Stellen: $y'(x_0)$ existiert nicht, y ist in x_0 aber stetig.
6. Asymptoten: vertikale Asymptoten und solche der Form $y = kx + d$.
7. Monotonieverhalten.
8. Konvexität.
9. Skizze.