Mathematik 1 C WS 2005/06

5. Übungsblatt

Martin Raindl: raindl@opt.math.tu-graz.ac.at

<u>Folgen und Reihen</u>

1. Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt{n})(n+\sqrt{n}+1)$

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}+1}{n+1}$

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

2. Man berechne folgende Grenzwerte der Folgen $\{x_n\}$, $n\in\mathbb{N}$:

   (a) $x_n=(1+\frac{1}{n})^{10}-1$

   (b) $x_n=\sqrt[n]{2^n+3^n}$

   (c) $x_n=\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^n$

   (d) $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(n^2+k)^{-\frac{1}{2}}$

   (e) $x_n=\prod\limits_{k=2}^{n}(1-\frac{1}{k})$

   (f) $x_n=\dfrac{2^n+(-3)^n}{(-2)^n+3^n}$

3. Untersuchen Sie folgende rekursiv definierten Folgen auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls deren Grenzwerte:

   (a) $x_{n+1}=x_n^2+\frac{1}{4},\qquad n\geq 1,\ x_1=a,\ 0\leq a\leq\frac{1}{2}$

   (b) $x_{n+1}=2-\frac{1}{x_n},\qquad n\geq 0,\ x_0=2$

   (c) $x_{n+1}=a+\frac{1}{x_n},\quad n\geq 0,\ x_0=a,\ a\geq 1$

4. Untersuchen Sie folgende unendlichen Reihen auf Konvergenz:

   (a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(k!)^2}{(2k)!}$

   (b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{k!}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2k-1)}$

   (c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2k)}{5\cdot8\cdot11\cdot\ldots\cdot(3k+2)}$

   (d) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{k^2+(-1)^k}{k^2+2}\right)^{k^3}$

   (e) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(a+\frac{1}{k}\right)^k,\quad a\in\mathbb{R}$

5. Bestimmen Sie mit Hilfe des Cauchyschen Verdichtungssatzes alle $a\in\mathbb{R}$, für welche die folgenden Reihen konvergieren:

   (a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^a}$

   (b) $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\dfrac{1}{k(\ln k)^a}$

6. Untersuchen Sie folgende Reihen $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ auf Konvergenz und auf absolute Konvergenz:

   (a) $a_k=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$

   (b) $a_k=\dfrac{\ln(k+1)-\ln(k)}{k}$