

## 4. Übungsblatt

Martin Raindl: raindl@opt.math.tu-graz.ac.at

Determinanten

1. Berechnen Sie die Determinante von folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 6 & 7 \\ 3 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

2. Man beweise die Regel von Sarrus mit Hilfe des Entwicklungssatzes von Laplace und dem Ergebnis von Beispiel 1.A. D.h. zu berechnen ist die Determinante von

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

mit Hilfe des Entwicklungssatzes.

3. Man berechne  $\det A$  für

$$(a) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ -2 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad (b) A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

4. Man bestimme die Determinante folgender Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b+c & 1 \\ b & a+c & 1 \\ c & a+b & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1+a & b & c \\ a & 1+b & c \\ a & b & 1+c \end{pmatrix}$$

5. Gegeben ist

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Man bestimme  $\det A$ ,  $A^{-1}$ ,  $\det A^{-1}$ .

6. Lösen Sie Beispiel 5 / 3. Übungsblatt mit Hilfe der Determinantenrechnung.

Eigenwerte und Eigenvektoren

7. Geben Sie für folgende Matrizen das charakteristische Polynom an und berechnen Sie daraus die Eigenwerte der Matrix. Geben Sie ferner die Eigenvektoren an:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

8. Man bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix  $A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Man bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren folgender Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -6 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -8 \\ -2 & -3 & -4 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} a & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad a \neq -1, \quad a \neq 2$$