Mathematik 1 C WS 2005/06

3. Übungsblatt

Martin Raindl: raindl@opt.math.tu-graz.ac.at

Matrizenrechnung

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -4 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

   Man berechne $3A$, $2A - 3B$, $C \cdot B$.

2. Man bestimme den Zeilenrang folgender Matrizen:

   $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \\ 3 & -5 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

   $(a \neq b,\ a \neq c,\ b \neq c)$

   $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 7 & 1 & -2 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

3. Man bestimme alle Matrizen $B \in M(3 \times 3; \mathbb{R})$, sodaß $B \cdot A = 0$ gilt

   mit: $\qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

4. Invertieren Sie folgende Matrizen, soferne die Inversen existieren:

   $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

5. Für welche $a \in \mathbb{R}$ sind folgende Matrizen regulär?

   $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a-2 & 2 & 2 \\ 2 & a-2 & 2 \\ 2 & 2 & a-2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$

Lineare Abbildungen

6. Man untersuche, ob folgende Abbildungen linear sind:

   (a) $F_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F_1((x,y,z)) = 2x - 3y + 4z$

   (b) $F_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $F_2((x,y)) = (x+1, x+y, y)$

   (c) $F_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $F_3((x,y,z)) = (|x|, 0)$

   (d) $F_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F_4(v) = v + a \qquad a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

(e) $F_5 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ F_5((x,y)) = (ax+by, cx+dy) \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}$

(f) $F_6 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ F_6((x,y)) = |x-y|$

7. Von der linearen Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ seien $F((1,1,1)) = 3$, $F((0,1,-2)) = 1$, $F((0,0,1)) = -2$ bekannt. Man bestimme $F((a,b,c))$.

8. Sei V ein $\mathbb{R}-$Vektorraum und $F : V \to \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung mit $F(a+2b) = -4$ und $F(2a-b) = 7$ für $a,b \in V$.
Man berechne $F(a)$, $F(b)$, $F(3a+b)$, $F(-a+3b)$.

Lineare Gleichungssysteme

9. Lösen Sie folgende Gleichungssysteme:

(a) $2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 18,\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24,\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 4$

(b) $2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 18,\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24,\ 2x_1 + 7x_2 + 12x_3 = 30$

(c) $2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 18,\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24,\ 2x_1 + 7x_2 + 12x_3 = 40$

10. Man bestimme den Lösungsraum der Gleichungssysteme $Ax = 0$ mit

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

11. Man bestimme den Lösungsraum der Gleichungssysteme $Ax = b$ mit

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -11 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & -4 & 8 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & -1 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

12. Man bestimme alle $a \in \mathbb{R}$, für die das Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & a & 0 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ bzw. $b = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(a) eindeutig lösbar ist
(b) lösbar ist.