Mathematik 1 C   WS 2005/06

2. Übungsblatt

Martin Raindl: raindl@opt.math.tu-graz.ac.at

Vektoren, Norm, Skalarprodukt

1. Gegeben seien die Punkte $p = (0, 1, 1)$, $q = (1, 3, 4)$, $r = (1, 0, -1)$ und $s = (2, 2, 2)$. Prüfen Sie, ob die Ortsvektoren $\vec{pq}$ und $\vec{rs}$ äquivalent sind.
2. Sei $\vec{a} = (3, x, -2)^t$, $\vec{b} = (6, -4, -3)^t$. Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $\vec{a} \perp \vec{b}$ ($\vec{a}$ steht orthogonal auf $\vec{b}$)?
3. Sei $\vec{a} = (3, 4)^t$ und $\vec{b} = (1, 2)^t$. Bestimmen Sie eine Darstellung von $\vec{a}$ durch $\vec{a} = \vec{x} + \vec{y}$, wobei $\vec{x} = \lambda\vec{b}$ und $\vec{y} \perp \vec{b}$ gelten soll.
4. Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = (2, 1, -2)^t$ und $\vec{b} = (2 + 2\sqrt{3}, 1 - 2\sqrt{3}, -2 + \sqrt{3})^t$. Bestimmen Sie die Norm der beiden Vektoren sowie den Winkel zwischen den beiden Vektoren.
5. Welchen Abstand hat der Punkt $P = (1, 3, -4)$ von $Q = (4, 7, 8)$?

Lineare Unabhängigkeit

6. Man untersuche, ob die Vektoren $\vec{u} = (1, 0, -1, 1, 2)^t$, $\vec{v} = (0, 1, 1, 2, 3)^t$, $\vec{w} = (1, 1, 0, 1, 0)^t$ des $\mathbb{R}^5$ linear unabhängig sind.
7. Im $\mathbb{R}^4$ sind die Vektoren $\vec{u} = (1, 0, -1, 1)^t$, $\vec{v} = (0, 1, -1, -1)^t$, $\vec{w} = (1, 1, 0, -1)^t$, $\vec{x} = (0, -6, 0, 9)^t$ gegeben.
   (a) Man zeige, daß die Familie $\mathcal{F} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x})$ linear abhängig ist.
   (b) Man gebe die größte Anzahl von Vektoren von $\mathcal{F}$ an, die eine linear unabhängige Familie bilden.
8. Mit $\vec{u} = (1, 1, -1)^t$, $\vec{v} = (0, 1, 1)^t \in \mathbb{R}^3$ bestimme man einen Vektor $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$, sodaß $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ linear unabhängig ist und $\mathrm{Span}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \mathbb{R}^3$ ist.

Äußeres Produkt, Spatprodukt

9. Mit $a = (1,1,2)^t$, $b = (1,2,1)^t$, $c = (2,1,1)^t$ berechne man:

   (a) $\langle a, b \times c \rangle$

   (b) $(a \times b) \times c$

   (c) $(c \times a) \times b$

   (d) $(b \times c) \times a$

10. Berechnen Sie das Vektorprodukt von $\vec{v} = (1,2,-1)^t$ und $\vec{w} = (2,1,-1)^t$

11. Stellen Sie die Ebene $\left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ in Gleichungsform dar.

Unterräume, Basis

12. Bestimmen Sie eine Basis des Unterraumes $U = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \right\}$

13. Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension des Unterraumes U, der von den 5 Vektoren $\vec{x_1} = (1,2,0,1)^t$, $\vec{x_2} = (-1,3,2,4)^t$, $\vec{x_3} = (2,4,-1,2)^t$, $\vec{x_4} = (2,9,1,7)^t$, $\vec{x_5} = (3,1,-3,-2)^t$ aufgespannt wird.

14. Man bestimme eine Basis und die Dimension von $U = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; 2x_1 - x_3 = 0,\; x_1 + x_2 + x_4 = 0 \right\}$

15. Liegt der Vektor $\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ im obigen Unterraum U ? Wenn ja, stelle man ihn durch die Basis dar!

16. Bestimmen Sie aus folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^3$ eine Orthonormalbasis:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Verwenden Sie das Gram-Schmidt'sche Orthogonalisierungsverfahren!