

1. Übungsblatt

Martin Raindl: raindl@opt.math.tu-graz.ac.at
<http://www.opt.math.tu-graz.ac.at/~raindl>

Komplexe Zahlen

1. Ermitteln Sie den Betrag der folgenden komplexen Zahlen, sowie die zugehörigen konjugiert komplexen Zahlen:

(a) $3 + 4i$ (c) $-i$
(b) $\operatorname{Im}(4 - 2i)$ (d) $0.1e^i$

2. Bringen Sie folgende komplexe Zahlen auf die Form $a + i \cdot b$:

(a) i^{10} (c) $(1 + i)^3$
(b) $\frac{1 + i}{1 - i}$ (d) $\frac{2 - i}{4 + 3i}$

3. Gegeben sind die komplexen Zahlen

$$z_1 = 2 + i \quad z_2 = 3 - 2i \quad z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Berechnen Sie folgende Ausdrücke:

(a) $|3z_1 - 4z_2|$ (c) $(\bar{z}_3)^3$
(b) $z_1^3 - 3z_1^2 + 4z_1 - 8$

4. Lösen Sie die folgenden komplexen Gleichungen:

(a) $2z + \bar{z} = 6 + i$ (b) $z^4 - z = 0$

5. Ermitteln Sie folgende Mengen komplexer Zahlen und skizzieren Sie diese in der Gauß'schen Zahlenebene:

(a) $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z - 3i| < 4\}$ (c) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z + 1| \leq |z + i|\}$
(b) $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z^2) \leq 4\}$ (d) $\{z \in \mathbb{C} \mid |\arg z| \leq \frac{\pi}{4} \wedge \operatorname{Re}(z) < 3\}$

Binomischer Lehrsatz

6. Man leite mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes Formeln für $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ sowie $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$ her.

Hinweis: Man setze $a = b = 1$ bzw. $a = 1$ und $b = -1$.

Kombinatorik

7. Wieviele verschiedene Isomere (gleiche Summenformel, unterschiedliche Anordnung) bzgl. Doppelbindung gibt es bei linearem Kohlenwasserstoff mit 3 Doppelbindungen und 4 Einfachbindungen?
8. Wieviele verschiedene 4-stellige Zahlen gibt es? Bei wievielen davon kommt keine Ziffer 0, 1, ..., 9 mehr als einmal vor? (Eine vierstellige Zahl beginnt nie mit einer 0!)
9. Aus 14 Personen sollen 6 Gruppen gebildet werden, sodaß 2 Gruppen aus 3 Personen und die restlichen 4 Gruppen aus 2 Personen bestehen. Wieviele Möglichkeiten gibt es?
10. Wieviele Möglichkeiten einer Mannschaftsaufstellung gibt es im Fußball? D.h. es sollen 10 (nicht unterscheidbare) Feldspieler in drei Gruppen aufgeteilt werden, wobei eine Gruppe auch leer bleiben kann! Wie ändert sich dies, wenn jede Gruppe besetzt sein muß?
11. Es seien 12 Punkte (A, B, ...) in einer Ebene gegeben, wobei niemals 3 auf einer Linie liegen.
- (a) Wieviele Geraden werden dadurch bestimmt?
 - (b) Wieviele Geraden gehen durch den Punkt A?
 - (c) Wieviele Dreiecke können gebildet werden?
 - (d) Wieviele Dreiecke mit Eckpunkt A sind möglich?
12. Wieviele Möglichkeiten gibt es, aus 8 Personen eine Gruppe von 4 Personen auszuwählen, wenn bekannt ist, daß sich 2 der Personen nicht vertragen und somit nicht gemeinsam ausgewählt werden dürfen?