

3. Aufgabe

Eigenwerte, Folgen und Reihen

Abgabe: 10./11. Jänner 2006

1. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Ermitteln Sie eine Matrix T und eine Diagonalmatrix D , sodaß gilt:

$$T \cdot D \cdot T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

3. Berechnen Sie den Grenzwert a der Folge

$$a_n = n \cdot \left(\frac{n+1}{n-1} - \frac{n-1}{n+1} \right)$$

und bestimmen Sie das *kleinste* n , sodaß $|a_n - a| < 0.001$ gilt.

4. Gegeben sei die rekursiv definierte Folge

$$x_{n+1} = \frac{1}{4 - x_n} \quad \text{mit } x_0 = 1$$

- (a) Zeigen Sie, daß x_n durch $\frac{1}{5}$ *nach unten* und durch 3 *nach oben beschränkt* ist.
- (b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Folge *monoton wachsend* bzw. *fallend*?
- (c) Ermitteln Sie den Grenzwert x^* der Folge.

5. Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{k=2}^{\infty} \binom{k}{2} \frac{k^2}{2^k}$$

auf Konvergenz.