

2. Aufgabe

Vektorrechnung, Lineare Algebra

Abgabe: 29./30. November 2005

1. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = (1, 2, -2)^t$ und $\vec{b} = (6, -2, -3)^t$.
Berechnen Sie

(a) $||\vec{a} \times \vec{b}||$ (c) $\frac{||\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \cdot \vec{b} - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \cdot \vec{a}||}{||\vec{a}||}$
(b) $\sqrt{||\vec{a}||^2 \cdot ||\vec{b}||^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2}$

2. Gegeben sind die vier Vektoren

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie $\alpha \in \mathbb{R}$ derart, daß $\vec{y}$ von $\{\vec{x}_1 \dots \vec{x}_3\}$ linear abhängig wird, und stellen Sie $\vec{y}$ als Linearkombination der ersten drei Vektoren dar.

3. Ist die folgende Abbildung F von $\mathbb{R}^2$ in die Menge der (2×2) -Matrizen,

$$F((x, y)) := \begin{pmatrix} 2x & x + y \\ y - x & 2y \end{pmatrix}$$

linear?

4. Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie $\text{Rang}(A)$, $\text{Rang}(B)$ und $\text{Rang}(A \cdot B)$.

5. Für welche Werte $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die folgende Matrix M invertierbar?

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

Wie lautet die Inverse in Abhängigkeit von α ?