

3. Aufgabenblatt

Martin Raindl: raindl@opt.math.tu-graz.ac.at
<http://www.opt.math.tu-graz.ac.at/~raindl>

Folgen und Reihen

25. Berechnen Sie die Grenzwerte der Folgen $\{x_n\}$ für
- (a) $x_n = \frac{n^2}{n-1} - \frac{n^2}{n+1}$ (b) $x_n = \sqrt{\frac{2^n+1}{3^n+1}}$
26. Zeigen Sie, daß die rekursiv definierte Folge konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert:

$$x_1 = 4, \quad x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

27. Untersuchen Sie folgende unendlichen Reihen auf Konvergenz:

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$ (b) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2^{k+1}}{2^k+1} \right)^k$

28. Untersuchen Sie die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{k^2+1}$

(a) auf Konvergenz und (b) auf absolute Konvergenz.

Differentialrechnung

29. Leiten Sie die folgenden Funktionen nach x ab:

(a) $\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$ (c) $x^2 e^{(1-x)}$

(b) $\sin(2x + \pi)$ (d) $\ln(\cos x)$

30. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$ (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-x} \quad n \in \mathbb{N} \text{ fest.}$

31. Entwickeln Sie folgende Funktionen in Taylorreihen (bis einschließlich Terme der 4. Potenz):

(a) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ in $x_0 = 0$

(b) $f(x) = \sqrt{x}$ nach Potenzen von $(x-1)$

(c) $f(x) = \cos\left(\frac{x^2}{2}\right)$ um den Ursprung

32. Berechnen Sie zur Funktion $f(x) = e^x - x - 2$ näherungsweise die beiden Nullstellen, und zwar

(a) jene bei $x = 1$ mit dem *Newton*-Verfahren (auf 3 Stellen genau)

(b) jene im Intervall $[-2, -1]$ mit der *regula falsi* (3 Iterations-Schritte)

33. Diskutieren Sie die Funktion

$$f(x) = x - 2 \arctan x$$