

2. Aufgabenblatt

Martin Raindl: raindl@opt.math.tu-graz.ac.at
<http://www.opt.math.tu-graz.ac.at/~raindl>

Matrizenrechnung

13. Berechnen Sie $A \cdot B$ und $B \cdot A$ mit folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 4 & 2 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 7 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

14. Bestimmen Sie den Zeilenrang der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ -2 & 3 & -4 & 5 & -6 \\ 3 & -4 & 5 & -6 & 5 \\ -4 & 5 & -6 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

15. Berechnen Sie, falls möglich, die Inverse der Matrix

$$J = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

16. (a) Für welche Werte von a und $b \in \mathbb{R}$ ist die folgende Matrix regulär?

$$A = \begin{pmatrix} a & -2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 2 & b & 0 \end{pmatrix}$$

- (b) Was ergibt sich für den Spezialfall $a = -8$?

Lineare Abbildungen

17. Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

(a) $F_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, F_1(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

(b) $F_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, F_2((a, b)) = \left(\frac{a+b}{2}, b-a\right)$

(c) $F_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, F_3((a, b)) = \left(\frac{a+1}{2}, 1-a\right)$

(d) $F_4 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, F_4(\vec{v}) = \langle \vec{a}, \vec{v} \rangle$ (Skalarprodukt) mit $\vec{a} = (1, 0, -2)^t$

18. Sei V ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum und $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung mit $F(a + b) = 2.5$ und $F(b - a) = 1.5$ für zwei Werte a und b aus V .
- (a) Berechnen Sie $F(a)$ und $F(b - 2a)$.
- (b) Bestimmen Sie $F(a + k \cdot b)$ für beliebige $k \in \mathbb{N}$

Lineare Gleichungssysteme

19. Bestimmen Sie den Lösungsraum des Gleichungssystems $Ax = 0$ für

$$(a) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \quad (b) B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & 7 \\ -1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

20. Bestimmen Sie den Lösungsraum des Gleichungssystems $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & 5 & 4 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 20 \\ -8 \\ 10 \\ 126 \end{pmatrix}$$

21. Man bestimme alle $a \in \mathbb{R}$, für die das Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & a & 0 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- (a) nicht lösbar ist (b) eindeutig lösbar ist.

Determinanten

22. Berechnen Sie die Determinanten folgender Matrizen:

$$(a) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ -4 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad (b) B = \begin{pmatrix} 1-a & b & c \\ b & 1-a & d \\ c & d & 1-a \end{pmatrix}$$

$$(c) C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & 8 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

23. Bestimmen Sie A^{-1} zur Matrix A aus Aufgabe 22 unter Verwendung der Determinante.

Eigenwerte, Eigenvektoren

24. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren folgender Matrizen:

$$(a) A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -8 & 3 & 4 \\ 6 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (b) B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$