Mathematik 1 C WS 2003/04

2. Aufgabe

Lineare Algebra

Abgabe: 17. Dezember 2003

1. Gegeben sind die Vektoren $\vec{v_1} = (1,2,a)^t$, $\vec{v_2} = (-1,-3,0)^t$, $\vec{v_3} = (0,1,-a)^t$ und $\vec{v_4} = (1,1,-2a)^t$; $a \in \mathbb{R}$ fest. Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension des von diesen Vektoren erzeugten Unterraumes und stellen Sie $\vec{v_4}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{v_1} \dots \vec{v_3}$ dar.

2. $\vec{a} = (-3,-4,3)^t$ $\qquad$ $\vec{b} = (2,1,-2)^t$ $\qquad$ $\vec{c} = (3,0,-1)^t$
   Berechnen Sie:
   a.) $\vec{b} \times \vec{a}$
   b.) $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle$
   c.) den Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b} - \vec{c}$

3. Berechnen sie die Rotationsmatrix A für eine Drehung der Ebene um $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ (bzw. 120°) um den Ursprung.
   Berechnen Sie damit die Bilder der Eckpunkte des Dreiecks ABC mit $A = (1,0)$, $B = (4,0)$ und $C = (4,4)$ und skizzieren Sie die beiden Dreiecke in der Ebene.

4. Berechnen sie zur Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 5 & -4 & -6 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
   alle Eigenwerte sowie die dazugehörigen Eigenvektoren unter Angabe der jeweiligen geometrischen und algebraischen Vielfachheit.

5. Berechnen Sie eine geeignete Transformationsmatrix T, um die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$
   auf Diagonalform D zu bringen, und bestätigen Sie Ihr Ergebnis durch Ausmultiplizieren des Ausdrucks TDT^{-1}.