1. Übungsblatt - Gruppe C

Lineare Algebra

1. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = (3, 1, -2)^t$ und $\vec{b} = (0, 2, 5)^t$.
Bestimmen Sie $\vec{a} + \vec{b}$ sowie $5\vec{a} - 2\vec{b}$. ①

2. Zeigen Sie, daß die Menge $U_0 = \{(0, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ einen Unterraum des Vektorraumes $\mathbb{R}^2$ darstellt.
Gilt dies auch für die Menge $U_1 = \{(1, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$? ②

3. Stellen Sie den Vektor $\vec{x} = (-3, 3, -4)^t$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{x}_1 = (3, 0, 1)^t$, $\vec{x}_2 = (0, 1, -1)^t$ und $\vec{x}_3 = (1, 0, 2)^t$ dar. ②

4. Gegeben sind die Vektoren $\vec{u} = (2, 6, 0)^t$ und $\vec{v} = (1, -3, 1)^t$. Bestimmen Sie im Vektor $\vec{x} = (2, 0, a)^t$ den Parameter a derart, daß gilt $\vec{x} \in \text{Span}\{\vec{u}, \vec{v}\}$. ②

5. Im $\mathbb{R}^4$ sind die drei Vektoren $\vec{v}_1 = (5, 0, 0, 1)^t$, $\vec{v}_2 = (1, 0, 0, 2)^t$, $\vec{v}_3 = (0, 0, 0, 9)^t$ gegeben.
 - (a) Zeigen Sie, daß die Familie $\mathcal{F} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ linear abhängig ist. ①

 - (b) Bestimmen Sie eine möglichst große Anzahl von Vektoren aus $\mathcal{F}$, die eine linear unabhängige Familie bilden. ②

6. Die Polynome $y_1 = x - 3$, $y_2 = x^2 + 1$ und $y_3 = 2x^2 + x - 1$ sind Elemente des Vektorraumes der Polynome 2. Grades.
 - (a) Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension jenes Unterraumes, der durch die gegebenen Polynome aufgespannt wird. ②

 - (b) Liegt das Polynom $z = 3x^2 + x$ in diesem Unterraum? Stellen Sie es ggf. durch die Basis aus (a) dar. ②

7. Man bestimme einen Vektor $\vec{u}$ in Richtung $\vec{r} = (6, 0, 2, -2)^t$ so, daß $\|\vec{u}\| = 1$ gilt. ①

8. Die drei Punkte $A = (1, -2, 4)$, $B = (-1, 2, 0)$ und $C = (-2, 0, -2)$ seien die Ecken des Dreiecks $\triangle(A, B, C)$. Berechnen Sie die Seitenlängen dieses Dreiecks sowie den Winkel des Dreiecks im Eckpunkt C .
(Hinweis: Betrachten Sie die Seiten des Dreiecks als Vektoren). ③

9. Sei $\vec{x} = (4, 0, -2, 1)^t$, $\vec{y} = (1, 2, 2, a)^t$ und $\vec{z} = (1, -3, 3, b)^t$. Bestimmen Sie a und $b \in \mathbb{R}$ so, daß $\vec{y} \perp \vec{x}$ und $\vec{z} \perp \vec{x}$ gilt. Gilt damit auch $\vec{z} \perp \vec{y}$? ②

10. Gesucht ist eine Darstellung des Vektors $\vec{a} = (1, 4)^t$ als Summe von zwei Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$, so daß $\vec{v}_1$ in die Richtung $\vec{r} = (-1, 2)^t$ weist und $\vec{v}_2$ dazu orthogonal steht. ③

11. Man ermittle aus folgenden Vektoren eine Orthonormalbasis des aufgespannten Vektorraumes (Hinweis: Gram-Schmidt-Verfahren):

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

⑥

12. Die beiden Vektoren $\vec{x}_1 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^t$ und $\vec{x}_2 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{6})^t$ bilden eine Orthonormalbasis eines Unterraumes des $\mathbb{R}^4$. Ermitteln Sie die Projektion $\vec{p}$ des Vektors $\vec{y} = (1, -4, 0, 3)^t$ auf diesen Unterraum. ②

13. Stellen Sie die Ebene

$$\left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$$

in Gleichungsform dar. ②

14. Bestimmen Sie eine Parameterform der Geraden

$$\left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 8, x_1 - 2x_2 - x_3 = 3 \right\} \quad \text{②}$$

15. Gegeben ist die Ebene $\left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 6 \right\}$.

(a) Bestimmen Sie zu dieser Ebene einen Normalvektor $\vec{n}$. ①

(b) Stellen Sie die Gerade in Richtung $\vec{n}$ durch den Ursprung mittels geeigneter Gleichungen dar. ②

16. Mit $\vec{a} = (3, 1, -1)^t$, $\vec{b} = (1, -2, 0)^t$ und $\vec{c} = (1, 4, 2)^t$ berechne man

(a) $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$ ①

(b) $\langle \vec{a}, \vec{c} \times \vec{b} \rangle$ ①