Mathematik 1 WS 2006/07

1. Übungsblatt - Gruppe B

Lineare Algebra

1. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = (0, 1, 4)^t$ und $\vec{b} = (5, -3, 2)^t$.
   Bestimmen Sie $\vec{a} + \vec{b}$ sowie $4\vec{a} - \vec{b}$. ①

2. Zeigen Sie, daß die Menge $U_0 = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ einen Unterraum des Vektorraumes $\mathbb{R}^2$ darstellt.
   Gilt dies auch für die Menge $U_1 = \{(y, 1) \mid y \in \mathbb{R}\}$? ②

3. Stellen Sie den Vektor $\vec{x} = (3, 2, -2)^t$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{x}_1 = (1, 3, 0)^t$, $\vec{x}_2 = (0, 2, 1)^t$ und $\vec{x}_3 = (-1, 0, 1)^t$ dar. ②

4. Gegeben sind die Vektoren $\vec{u} = (3, 0, -1)^t$ und $\vec{v} = (2, 4, 0)^t$. Bestimmen Sie im Vektor $\vec{x} = (2, -2, a)^t$ den Parameter a derart, daß gilt $\vec{x} \in \operatorname{Span}\{\vec{u}, \vec{v}\}$. ②

5. Im $\mathbb{R}^4$ sind die drei Vektoren $\vec{v}_1 = (0, 0, 5, 0)^t$, $\vec{v}_2 = (0, 1, 3, 0)^t$, $\vec{v}_3 = (0, 4, 2, 0)^t$ gegeben.
   (a) Zeigen Sie, daß die Familie $\mathcal{F} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ linear abhängig ist. ①
   (b) Bestimmen Sie eine möglichst große Anzahl von Vektoren aus $\mathcal{F}$, die eine linear unabhängige Familie bilden. ②

6. Die Polynome $y_1 = x^2 - x - 1$, $y_2 = 2x + 2$ und $y_3 = 4x^2$ sind Elemente des Vektorraumes der Polynome 2. Grades.
   (a) Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension jenes Unterraumes, der durch die gegebenen Polynome aufgespannt wird. ②
   (b) Liegt das Polynom $z = x^2 + 2x + 2$ in diesem Unterraum? Stellen Sie es ggf. durch die Basis aus (a) dar. ②

7. Man bestimme einen Vektor $\vec{u}$ in Richtung $\vec{r} = (4, 0, -2, 5)^t$ so, daß $\|\vec{u}\| = 1$ gilt. ①

8. Die drei Punkte $A = (-2, 0, 1)$, $B = (4, -6, -2)$ und $C = (0, 6, 4)$ seien die Ecken des Dreiecks $\triangle(A, B, C)$. Berechnen Sie die Seitenlängen dieses Dreiecks sowie den Winkel des Dreiecks im Eckpunkt B.
   (Hinweis: Betrachten Sie die Seiten des Dreiecks als Vektoren). ③

9. Sei $\vec{x} = (3,2,0,-2)^t$, $\vec{y} = (2,-2,1,a)^t$ und $\vec{z} = (-2,3,5,b)^t$. Bestimmen Sie a und $b \in \mathbb{R}$ so, daß $\vec{y} \perp \vec{x}$ und $\vec{z} \perp \vec{x}$ gilt.
Gilt damit auch $\vec{z} \perp \vec{y}$? ②

10. Gesucht ist eine Darstellung des Vektors $\vec{a} = (3,2)^t$ als Summe von zwei Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$, so daß $\vec{v}_1$ in die Richtung $\vec{r} = (2,-1)^t$ weist und $\vec{v}_2$ dazu orthogonal steht. ③

11. Man ermittle aus folgenden Vektoren eine Orthonormalbasis des aufgespannten Vektorraumes (Hinweis: Gram-Schmidt-Verfahren):

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

⑥

12. Die beiden Vektoren $\vec{x}_1 = (0, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})^t$ und $\vec{x}_2 = (-\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}, 0)^t$ bilden eine Orthonormalbasis eines Unterraumes des $\mathbb{R}^4$.
Ermitteln Sie die Projektion $\vec{p}$ des Vektors $\vec{y} = (5,-1,1,-1)^t$ auf diesen Unterraum. ②

13. Stellen Sie die Ebene

$$\left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

in Gleichungsform dar. ②

14. Bestimmen Sie eine Parameterform der Geraden
$\left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 3,\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -2\right\}$ ②

15. Gegeben ist die Ebene $\left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 5\right\}$.

    (a) Bestimmen Sie zu dieser Ebene einen Normalvektor $\vec{n}$. ①

    (b) Stellen Sie die Gerade in Richtung $\vec{n}$ durch den Ursprung mittels geeigneter Gleichungen dar. ②

16. Mit $\vec{a} = (2,-2,1)^t$, $\vec{b} = (3,0,1)^t$ und $\vec{c} = (-1,-1,4)^t$ berechne man

    (a) $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$ ①

    (b) $\langle \vec{a}, \vec{c} \times \vec{b} \rangle$ ①