

1. Übungsblatt - Gruppe A

Lineare Algebra

1. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = (2, -1, 0)^t$ und $\vec{b} = (5, 2, -1)^t$.
Bestimmen Sie $\vec{a} + \vec{b}$ sowie $3\vec{a} - 2\vec{b}$. ①
2. Zeigen Sie, daß die Menge $U_0 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ einen Unterraum des Vektorraumes $\mathbb{R}^2$ darstellt.
Gilt dies auch für die Menge $U_1 = \{(y, 1) \mid y \in \mathbb{R}\}$? ②
3. Stellen Sie den Vektor $\vec{x} = (4, -1, -1)^t$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{x}_1 = (2, 0, 1)^t$, $\vec{x}_2 = (1, -1, 0)^t$ und $\vec{x}_3 = (0, 1, 3)^t$ dar. ②
4. Gegeben sind die Vektoren $\vec{u} = (1, 1, -1)^t$ und $\vec{v} = (0, 3, 3)^t$. Bestimmen Sie im Vektor $\vec{x} = (1, 2, a)^t$ den Parameter a derart, daß gilt $\vec{x} \in \text{Span}\{\vec{u}, \vec{v}\}$. ②
5. Im $\mathbb{R}^4$ sind die drei Vektoren $\vec{v}_1 = (1, 0, 4, 0)^t$, $\vec{v}_2 = (-2, 0, 1, 0)^t$, $\vec{v}_3 = (3, 0, 0, 0)^t$ gegeben.
 - (a) Zeigen Sie, daß die Familie $\mathcal{F} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ linear abhängig ist. ①
 - (b) Bestimmen Sie eine möglichst große Anzahl von Vektoren aus $\mathcal{F}$, die eine linear unabhängige Familie bilden. ②
6. Die Polynome $y_1 = x + 2$, $y_2 = 2x^2 + 5x$ und $y_3 = x^2 + 2x - 1$ sind Elemente des Vektorraumes der Polynome 2. Grades.
 - (a) Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension jenes Unterraumes, der durch die gegebenen Polynome aufgespannt wird. ②
 - (b) Liegt das Polynom $z = 5 - x^2$ in diesem Unterraum? Stellen Sie es ggf. durch die Basis aus (a) dar. ②
7. Man bestimme einen Vektor $\vec{u}$ in Richtung $\vec{r} = (1, 4, -3, 1)^t$ so, daß $\|\vec{u}\| = 1$ gilt. ①
8. Die drei Punkte $A = (4, 9, -3)$, $B = (1, 3, 3)$ und $C = (-2, 1, -3)$ seien die Ecken des Dreiecks $\triangle(A, B, C)$. Berechnen Sie die Seitenlängen dieses Dreiecks sowie den Winkel des Dreiecks im Eckpunkt A .
(Hinweis: Betrachten Sie die Seiten des Dreiecks als Vektoren). ③

9. Sei $\vec{x} = (1, -4, 3, 3)^t$, $\vec{y} = (3, 0, -1, a)^t$ und $\vec{z} = (3, 0, 1, b)^t$. Bestimmen Sie a und $b \in \mathbb{R}$ so, daß $\vec{y} \perp \vec{x}$ und $\vec{z} \perp \vec{x}$ gilt. Gilt damit auch $\vec{z} \perp \vec{y}$? ②

10. Gesucht ist eine Darstellung des Vektors $\vec{a} = (4, -1)^t$ als Summe von zwei Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$, so daß $\vec{v}_1$ in die Richtung $\vec{r} = (1, -2)^t$ weist und $\vec{v}_2$ dazu orthogonal steht. ③

11. Man ermittle aus folgenden Vektoren eine Orthonormalbasis des aufgespannten Vektorraumes (Hinweis: Gram-Schmidt-Verfahren):

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{⑥}$$

12. Die beiden Vektoren $\vec{x}_1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, -\frac{2}{3})^t$ und $\vec{x}_2 = (\frac{8}{9}, 0, -\frac{1}{9}, \frac{4}{9})^t$ bilden eine Orthonormalbasis eines Unterraumes des $\mathbb{R}^4$. Ermitteln Sie die Projektion $\vec{p}$ des Vektors $\vec{y} = (3, 3, -1, 2)^t$ auf diesen Unterraum. ②

13. Stellen Sie die Ebene

$$\left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

in Gleichungsform dar. ②

14. Bestimmen Sie eine Parameterform der Geraden $\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \}$ ②

15. Gegeben ist die Ebene $\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 4x_1 - x_2 - 2x_3 = 8 \}$.

(a) Bestimmen Sie zu dieser Ebene einen Normalvektor $\vec{n}$. ①

(b) Stellen Sie die Gerade in Richtung $\vec{n}$ durch den Ursprung mittels geeigneter Gleichungen dar. ②

16. Mit $\vec{a} = (4, -1, 2)^t$, $\vec{b} = (0, 3, 3)^t$ und $\vec{c} = (-1, 2, 1)^t$ berechne man

(a) $\| \vec{a} \times \vec{b} \|$ ①

(b) $\langle \vec{a}, \vec{c} \times \vec{b} \rangle$ ①