

Vollständige Induktion

1. $A_1(n)$: „ $5^n - 2^n$ ist durch 3 teilbar “

- Anfang: Aussage ist richtig für $n = 1$, denn $5 - 2 = 3$.
- Annahme: Aussage sei richtig für gegebenes n .
- Schritt: Ist dann auch $A_1(n+1)$ richtig, also $5^{n+1} - 2^{n+1}$ durch 3 teilbar?
 - (a) $5^{n+1} - 2^{n+1} = 5 \cdot 5^n - 2 \cdot 2^n = 3 \cdot 5^n + 2 \cdot 5^n - 2 \cdot 2^n = 3 \cdot 5^n + 2 \cdot (5^n - 2^n)$.
 - (b) Der erste Term $3 \cdot 5^n$ ist offensichtlich durch 3 teilbar. Vom zweiten Term $2 \cdot (5^n - 2^n)$ wissen wir aufgrund der Annahme, daß er ebenfalls durch 3 teilbar ist.
 - (c) Also ist $5^{n+1} - 2^{n+1}$ durch 3 teilbar.
- Schluß: Die Aussage A_1 stimmt für alle $n \in \mathbb{N}$.

„ $A_1(1)$ stimmt, und wenn $A_1(n)$ stimmt, so stimmt auch $A_1(n+1)$ “
 $\Rightarrow A_1$ stimmt für alle $n \in \mathbb{N}$.

2. $A_2(n)$: „ $\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$ “

- Anfang: $A_2(1)$ ist richtig, denn $\sum_{k=1}^1 (2k-1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1^2$.
- Annahme: Aussage sei richtig für gegebenes $n-1$,
es gelte also $\sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) = (n-1)^2$.
- Schritt: Ist dann auch $A_2(n)$ richtig?
 - (a) $\sum_{k=1}^n (2k-1) = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) + (2n-1)$.
 - (b) Den ersten Term der rechten Seite können wir aufgrund der Induktions-Annahme ersetzen:
 $\sum_{k=1}^n (2k-1) = (n-1)^2 + (2n-1) = n^2 - 2n + 1 + 2n - 1 = n^2$
 - (c) Die Aussage A_2 ist also auch für n richtig.
- Schluß: Die Aussage A_2 stimmt für alle $n \in \mathbb{N}$.

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 + 25 + 27 + 29 = 15^2$$