Berechnung von Grenzwerten diverser Funktionen

Vorbemerkung

0. Liegt keine Problemstelle (Division durch 0, Änderung der Definition etc.) vor, kann der Grenzwert einfach durch Einsetzen des Arguments in die Funktion bestimmt werden:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2}{x^2-7}=\frac{3^2}{3^2-7}=\frac{9}{2}$$

Grenzwerte für $x\to 0$

1. Division eines Ausdrucks $p\neq 0$ durch einen Ausdruck q mit $q\to 0$.
Die Funktion wird jedenfalls unbeschränkt. Es ist jedoch (je nach Vorzeichen von p und q) zu unterscheiden, ob die Funktion gegen $+\infty$ oder $-\infty$ strebt. Es kann sich insbesondere für die Annäherung von verschiedenen Seiten ein unterschiedliches Verhalten ergeben[1].

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+1}{x}=+\infty\qquad \lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+1}{x}=-\infty$$

Der Zähler ist für $x=0$ positiv, der Nenner wird beliebig klein, bleibt aber im ersten Fall positiv und im zweiten Fall negativ.
Anders bei z.B. geraden Potenzen:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x-4}{x^2}=-\infty\qquad \lim_{x\to 0^-}\frac{x-4}{x^2}=-\infty$$

2. Division eines Ausdrucks p durch einen Ausdruck q, wobei sowohl $p\to 0$ als auch $q\to 0$. Im einfachsten Fall können Potenzen von x im Zähler und Nenner herausgehoben und anschließend gekürzt werden. Dies führt auf eine der bisher genannten Formen.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{3x^2-2x^3}{x^2-x^4}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2(3-2x)}{x^2(1-x^2)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{3-2x}{1-x^2}=\frac{3}{1}=3$$

Funktioniert auch mit gebrochenen Potenzen:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{3x+x^3}}{\sqrt{2x^2(x+1)}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}\sqrt{3+x^2}}{x\sqrt{2(x+1)}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\infty$$

3. Konjugiertes Erweitern

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)}{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)}{\cancel{1}+x^2-\cancel{1}}=\frac{\sqrt{1}+1}{1}=2$$

Grenzwerte für $x\to c$

4. Berechnung von Grenzwerten für Argumente $x\to c\neq 0$: Meist kann mittels Substitution ($x=z+c$) auf obige Formen zurückgeführt werden[2].
Z.B. gilt mit $x=z+2$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{2x^2+x-10}=\lim_{z\to 0}\frac{(z+2)^2-(z+2)-2}{2(z+2)^2+(z+2)-10}=\lim_{z\to 0}\frac{z^2+4z+4-z-2-2}{2z^2+8z+8+z-8}=\lim_{z\to 0}\frac{z^2+3z}{2z^2+9z}=\frac{1}{3}$$

Der Grenzwert läßt sich bisweilen auch direkt durch Faktorisierung von Zähler und Nenner und anschließendes Kürzen der $0-$Terme finden:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{2x^2+x-10}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)}{(2x+5)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{2x+5}=\frac{1}{3}$$

5. Berechnung von Grenzwerten für Argumente $x\to\infty$: Durch die Substitution $x=\frac{1}{z}$ mit $z\to 0$ erhält man wieder die obengenannte Form:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x+1}}=\lim_{z\to 0^+}\frac{\sqrt{\frac{1}{z}}+1}{\sqrt{\frac{1}{z}+1}}=\lim_{z\to 0^+}\frac{\frac{1}{\sqrt{z}}+1}{\sqrt{\frac{1+z}{z}}}=\lim_{z\to 0^+}\frac{\frac{1+\sqrt{z}}{\sqrt{z}}}{\frac{\sqrt{1+z}}{\sqrt{z}}}=\lim_{z\to 0^+}\frac{1+\sqrt{z}}{\sqrt{1+z}}=1$$

[1] Annäherung „von oben“, $x\to 0^+$, also für $x-$Werte, die etwas größer sind als 0, d.h. positiv bzw. Annäherung „von unten“, $x\to 0^-$, also für kleine negative Werte von x

[2] Im allgemeinen ist auch hier zu unterscheiden, von welcher Seite die Annäherung erfolgt!