

B

 Berechnung der Integrale

- | | |
|--|---|
| 1. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$ | 6. $\int \operatorname{Arcsin} x \, dx$ |
| 2. $\int \cos^3 x \, dx$ | 7. $\int \frac{e^{2x} dx}{1-e^x}$ |
| 3. $\int \frac{dx}{4 \sin x - 3 \cos x}$ | 8. $\int \frac{dx}{1-\sqrt{x}}$ |
| 4. $\int x^n e^{-x} dx \quad (n \in \mathbb{N})$ | 9. $\int \left(\frac{x-1}{x^2}\right) e^x dx$ |
| 5. $\int_0^1 x^n (1-x)^m dx \quad (n, m \in \mathbb{N})$ | 10. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$ |

Lösungen:

1. Beim Term $\sqrt{1+x^2}$ bietet sich die Substitution $x = \sinh t$ an (denn $1 + \sinh^2 t = \cosh^2 t$):

$$x = \sinh t \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \cosh t \quad \Rightarrow \quad dx = \cosh t \, dt$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}}} &= \int \frac{\cosh t \, dt}{\sinh^2 t \underbrace{\sqrt{1+\sinh^2 t}}_{\cosh t}} = \int \frac{dt}{\sinh^2 t} = -\coth(t) \\ &= -\frac{\cosh(t)}{\sinh(t)} = \underline{\underline{-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C}} \end{aligned}$$

2. hier ist wieder die Identität $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ von Nutzen:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\int \cos^3 x \, dx}} &= \int \cos^2 x \cdot \cos x \, dx = \int (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx \\ &= \int \cos x \, dx - \int \underbrace{(\sin x)^2}_z \underbrace{\cos x \, dx}_{dz} = \sin x - \int z^2 \, dz \\ &= \sin x - \frac{z^3}{3} = \underline{\underline{\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C}} \end{aligned}$$

3. Standard-Substitution (Vgl. Bsp. 1.(i), 3. Übungsbl.) $z = \tan \frac{x}{2}$ etc.:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\int \frac{dx}{4 \sin x - 3 \cos x}}} &= \int \frac{\frac{2 \, dz}{1+z^2}}{4 \frac{2z}{1+z^2} - 3 \frac{1-z^2}{1+z^2}} = \int \frac{2 \, dz}{3z^2 + 8z - 3} = \int \frac{2 \, dz}{(z+3)(3z-1)} \\ &= \frac{3}{5} \int \frac{dz}{3z-1} - \frac{1}{5} \int \frac{dz}{z+3} = \frac{1}{5} \ln |3z-1| - \frac{1}{5} \ln |z+3| = \underline{\underline{\frac{1}{5} \ln \left| \frac{3 \tan(x/2) - 1}{\tan(x/2) + 3} \right| + C}} \end{aligned}$$

4. Partielle Integration:

$$\int \underbrace{x^n}_u \underbrace{e^{-x}}_{v'} dx = \underbrace{x^n}_u \underbrace{(-e^{-x})}_v - \int \underbrace{-e^{-x}}_v \underbrace{nx^{n-1}}_{u'} dx = -x^n e^{-x} + n \int x^{n-1} e^{-x} dx$$

Anwendung der Formel mit $n-1$ statt n für das Integral rechts außen:

$$\int x^{n-1} e^{-x} dx = -x^{n-1} e^{-x} + (n-1) \int x^{n-2} e^{-x} dx$$

u.s.w. bis schließlich

$$\int x e^{-x} dx = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} + C$$

Zusammengefaßt:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\int x^n e^{-x} dx}} &= -x^n e^{-x} + n \cdot [-x^{n-1} e^{-x} + (n-1) (-x^{n-2} e^{-x} - \dots + (-e^{-x} + C) \dots)] \\ &= -e^{-x} [x^n + nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} + n(n-1)(n-2)x^{n-3} \dots + n!] + \tilde{C} \\ &= \underline{\underline{-n! e^{-x} \left[\frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + \frac{x^2}{2!} + \frac{x}{1!} + 1 \right] + \tilde{C}}} \end{aligned}$$

5. Partielle Integration:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\int_0^1 \underbrace{x^n}_u \underbrace{(1-x)^m}_{v'} dx}} &= \left[\underbrace{x^n}_u \underbrace{\frac{-(1-x)^{m+1}}{m+1}}_v \right]_0^1 - \int_0^1 \underbrace{nx^{n-1}}_{u'} \underbrace{\frac{-(1-x)^{m+1}}{(m+1)}}_v dx \\ &= [0] + \frac{n}{m+1} \int_0^1 x^{n-1} (1-x)^{m+1} dx \\ &\stackrel{(\text{analog})}{=} \frac{n}{(m+1)} \frac{(n-1)}{(m+2)} \int_0^1 x^{n-2} (1-x)^{m+2} dx \\ &= \dots \\ &= \frac{n(n-1)(n-2) \dots 1}{(m+1)(m+2) \dots (m+n)} \int_0^1 1 \cdot (1-x)^{m+n} dx \\ &= \frac{m!}{m!} \frac{n(n-1)(n-2) \dots 1}{(m+1)(m+2) \dots (m+n)} \left[\frac{-(1-x)^{m+n+1}}{m+n+1} \right]_0^1 \\ &= \underline{\underline{\frac{m! \cdot n!}{(m+n+1)!}}} \end{aligned}$$

6. Partielle Integration mit Faktor 1 und anschließender Substitution $z = 1 - x^2$:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\int \underbrace{\operatorname{Arcsin} x}_u \cdot \underbrace{1}_{v'} dx}} &= \operatorname{Arcsin} x \cdot x - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot x dx \\ &= x \operatorname{Arcsin} x + \frac{1}{2} \int \frac{dz}{\sqrt{z}} = \underline{\underline{x \operatorname{Arcsin} x + \sqrt{1-x^2} + C}} \end{aligned}$$

7. Substitution

$$e^x = u \quad \rightarrow \quad \frac{du}{dx} = e^x = u \quad \rightarrow \quad dx = \frac{du}{u}$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\int \frac{e^{2x} dx}{1-e^x}}} &= \int \frac{u^2 du}{1-u} = \int \left(-1 + \frac{1}{1-u} \right) du \\ &= -u - \ln|1-u| = \underline{\underline{-e^x - \ln|1-e^x| + C}} \end{aligned}$$

8. Substitution:

$$z = \sqrt{x} \quad \rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2z} \quad \rightarrow \quad 2z dz = dx$$

$$\underline{\underline{\int \frac{dx}{1-\sqrt{x}}}}} = \int \frac{2z dz}{1-z} \quad (\text{vgl. Bsp. 7}) \quad -2z - 2 \ln|1-z| = \underline{\underline{-2\sqrt{x} - 2 \ln|1-\sqrt{x}| + C}}$$

9. Die Funktion lässt sich nicht direkt partiell integrieren! Allerdings ergibt sich:

$$\int \left(\frac{x-1}{x^2} \right) e^x dx = \int \frac{1}{x} e^x dx - \int \frac{1}{x^2} e^x dx$$

Partielle Integration des rechten Integrals liefert:

$$\int \frac{1}{x^2} e^x dx = \frac{-1}{x} e^x - \int \frac{-1}{x} e^x dx$$

Einsetzen in die obere Zeile liefert damit:

$$\underline{\underline{\int \left(\frac{x-1}{x^2} \right) e^x dx}} = \int \frac{1}{x} e^x dx + \frac{1}{x} e^x - \int \frac{1}{x} e^x dx = \underline{\underline{\frac{1}{x} e^x + C}}$$

10. Ausmultiplizieren des Nenners liefert:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$$

Um eine Substitution anwenden zu können, muß der Ausdruck unter der Wurzel geeignet quadratisch ergänzt werden. Wegen $(x+a)^2 = x^2 + 2ax + 1$ ist hier $a = -\frac{1}{2}$ zu wählen:

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 &= x^2 - x + \frac{1}{4} \\ \Rightarrow \underline{x - x^2} &= \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \left[1 - 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2\right] = \underline{\frac{1}{4}[1 - (2x - 1)^2]} \end{aligned}$$

Mit der Substitution $2x - 1 = z$ und damit $2dx = dz$ ergibt sich das unbestimmte Integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = \int \frac{2dx}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} = \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

Die hierfür geeignete Substitution lautet $z = \sin t$ und damit $dz = \cos t dt$:

$$\begin{aligned} \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} &= \int \frac{\cos t dt}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = \int \frac{\cos t dt}{\sqrt{\cos^2 t}} \\ &= \int dt = t = \operatorname{Arcsin} z = \operatorname{Arcsin}(2x - 1) + C \end{aligned}$$

Das gegebene *bestimmte* Integral ist ein *uneigentliches* Integral, denn für beide Grenzen wird der Nenner zu 0.

$$\begin{aligned} \underline{\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}} &= \lim_{A \rightarrow 0} \int_A^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} + \lim_{B \rightarrow 1} \int_{1/2}^B \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} \\ &= \lim_{A \rightarrow 0} \left[\operatorname{Arcsin}(2x - 1) \right]_A^{1/2} + \lim_{B \rightarrow 1} \left[\operatorname{Arcsin}(2x - 1) \right]_{1/2}^B \\ &= \lim_{A \rightarrow 0} \left[\underbrace{\operatorname{Arcsin}(0)}_0 - \underbrace{\operatorname{Arcsin}(2A - 1)}_{\substack{\rightarrow -1 \\ \rightarrow -\pi/2}} \right] + \lim_{B \rightarrow 1} \left[\underbrace{\operatorname{Arcsin}(2B - 1)}_{\substack{\rightarrow 1 \\ \rightarrow \pi/2}} - \underbrace{\operatorname{Arcsin}(0)}_0 \right] = \underline{\underline{\pi}} \end{aligned}$$

