Beispiele zum Satz von Green

1. Bestimmen Sie den Wert des Integrals

$$I = \oint\limits_C y^3\,dx + x^2y\,dy$$

wobei C der Rand jenes Bereiches B ist, der durch die Geraden $x = 0$ (x-Achse), $y = 4 + x$ (Gerade durch die Punkte $(-4, 0)$ und $(0, 4)$) und $y = 4 - x$ (Gerade durch die Punkte $(4, 0)$ und $(0, 4)$) berandet wird.

Lösung:
Nach dem Satz von Green gilt

$$\oint\limits_C y^3\,dx + x^2y\,dy = \iint\limits_B (2xy - 3y^2)\,dydx$$

In B läuft die Variable x zwischen den Werten -4 und 4 und die Variable y (von x abhängig) zunächst zwischen den Werten 0 und $(4 + x)$ solange $x < 0$ gilt, und dann zwischen den Werten 0 und $(4 - x)$.

$$I = \int\limits_{x=-4}^{0} \int\limits_{y=0}^{4+x} (2xy - 3y^2)\,dydx + \int\limits_{x=0}^{4} \int\limits_{y=0}^{4-x} (2xy - 3y^2)\,dydx$$

$$= \int\limits_{x=-4}^{0} \left[xy^2 - y^3\right]_{y=0}^{4+x}\,dx + \int\limits_{x=0}^{4} \left[xy^2 - y^3\right]_{y=0}^{4-x}\,dx$$

$$= \int\limits_{-4}^{0} (-4x^2 - 32x - 64)\,dx + \int\limits_{0}^{4} (2x^3 - 20x^2 + 64x - 64)\,dx$$

$$= -\frac{256}{3} - \frac{128}{3} = -128$$

2. Berechnen Sie den Wert des Integrals

$$I = \oint_C (3x^3y + xy^3)\,dx + 2\,dy$$

wobei C der Rand jenes Bereiches B sei, für den zugleich $x \geq 0$, $0 \leq y \leq x$ und $x^2 + y^2 \leq 4$ gilt (Achtelkreis mit Radius 2 rechts vom Ursprung über der x-Achse)

Lösung:
Es gilt wiederum nach dem Satz von Green:

$$I = \iint_B (0 + 3x^3 + 3xy^2)\,dy\,dx = \iint_B 3x(x^2 + y^2)\,dy\,dx$$

Hier empfielt sich der Übergang auf Polarkoordinaten: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $dy\,dx = r\,dr\,d\varphi$.
Für den Bereich ergibt sich damit: $0 \leq r \leq 2$ und $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$.
Das gesuchte Integral lautet somit:

$$I = \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{4}} \int_{r=0}^{2} 3r\cos\varphi(r^2)\,r\,dr\,d\varphi = 3\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{4}} \int_{r=0}^{2} r^4\cos\varphi\,dr\,d\varphi =$$

$$= 3\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^2 \cos\varphi\,d\varphi = \frac{3\cdot 2^5}{5}\,[\sin\varphi]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3\cdot 2^5}{5\sqrt{2}} = 13.57645$$