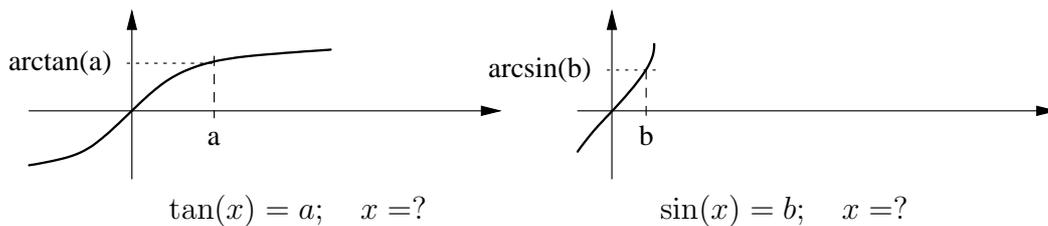
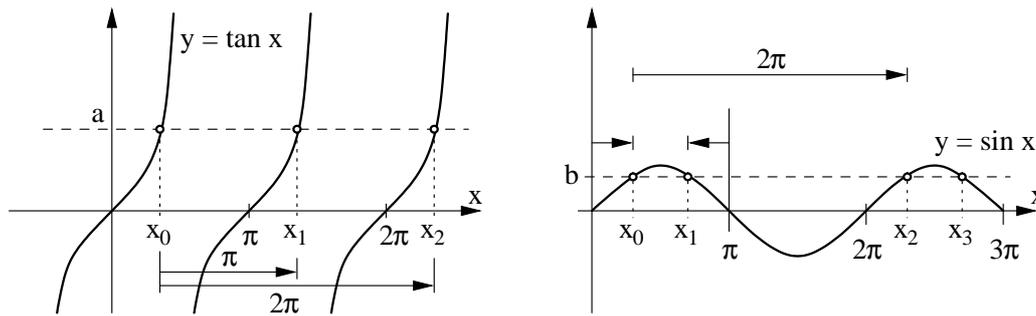


B Lösen von goniometrischen Gleichungen:

Auflösen der Gleichungen $\tan(x) = a$ bzw. $\sin(x) = b$.



Die Gleichung $\tan(x) = a$ (Skizze links oben) hat unendlich viele Lösungen x_0, x_1, x_2, \dots , die sich wegen der Periode π des Tangens mit diesem Abstand wiederholen.

Die Umkehrfunktion $x = \arctan(a)$ (Skizze links unten) liefert allerdings nur den ersten Wert x_0 als Lösung!

Die weiteren Werte ergeben sich durch Addition eines beliebigen ganzzahligen Vielfachen von π :

$$\tan(x) = a \implies \text{Lösung: } x_k = \arctan(a) + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Bsp.:

$$\tan(x) = 2 \implies x_k = \arctan(2) + k\pi = \{\dots, -2.0344, \mathbf{1.107}, 4.249, 7.390, \dots\}$$

Die Gleichung $\sin(x) = b$ (Skizze rechts oben) hat ebenfalls unendlich viele Lösungen, die sich allerdings mit der Periode 2π wiederholen.

Die erste Lösung ergibt sich mit der Umkehrfunktion $x_0 = \arcsin(b)$, die Lösungen mit *geradem* Index durch Addition von ganzzahligen Vielfachen von 2π .

Im Unterschied zur Tangens-Funktion gibt es aber noch weitere Werte, die die Gleichung erfüllen! Wegen der Tatsache $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ (siehe Skizze) ergibt sich $x_1 = \pi - x_0$, und alle weiteren Lösungen mit *ungeradem* Index wiederum durch Addition von ganzzahligen Vielfachen von 2π :

$$\sin(x) = b \implies \text{Lösung: } \begin{cases} x_{2k} = \arcsin(b) + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ x_{2k+1} = \pi - \arcsin(b) + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Bsp.:

$$\sin(x) = 0.75 \implies x_k = \begin{cases} \dots, -5.435, \mathbf{0.848}, 7.131, 13.414, \dots \\ \dots, -3.990, 2.294, 8.577, \dots \end{cases}$$

Die Lösung von $\cos(x) = c$ erfolgt weitestgehend analog, wobei zum Unterschied vom Sinus die Eigenschaft $\cos(2\pi - x) = \cos(x)$ mit $x_1 = 2\pi - x_0$ etc. die Lösungen mit *ungeradem* Index liefert.