Beispiele zum Satz von Gauß

1. Berechnen Sie den Fluß Φ des Vektorfeldes $\vec{V} = (xz, yz, x^2+y^2)^t$ durch die Oberfläche des Quaders Q, der durch folgende Flächen begrenzt wird:

$x = 0$	(y, z-Ebene)
$x = a$	(Ebene parallel zur 1. Ebene mit Abstand a in x-Richtung)
$y = 0$	(x, z-Ebene)
$y = b$	...
$z = 0$	
$z = h$	

   Lösung:
   Nach dem Satz von Gauß ist der Fluß durch die Oberfläche (das wären hier 6 Integrale!) gleich dem Integral der Divergenz über das eingeschlossene Volumen.

$$\operatorname{div}\begin{pmatrix} xz \\ yz \\ x^2+y^2 \end{pmatrix} = 2z$$

$$\Phi = \iiint\limits_Q \operatorname{div}(\vec{V})dV = \int\limits_{x=0}^{a}\int\limits_{y=0}^{b}\int\limits_{z=0}^{h} 2z\,dz\,dy\,dx = \ldots = abh^2$$

2. Wieviel Fluß Φ strömt im Vektorfeldes $\vec{V} = (yz+x, 4y^2, 1)^t$ pro Zeiteinheit aus dem Körper, der durch die Flächen

$x = 0,$	$x = 1,$	(x hängt von keiner anderen Variablen ab)
$y = 0,$	$y = 2 - x,$	(y hängt von x ab)
$z = 0,$	$z = y + x^2$	(z hängt von x und y ab)

   begrenzt wird?

   Lösung:
   $\operatorname{div}(\vec{V}) = 1 + 8y$.

$$\Phi = \int\limits_{x=0}^{1}\int\limits_{y=0}^{2-x}\int\limits_{z=0}^{y+x^2} (1+8y)\,dz\,dy\,dx = \int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{2-x} \big[(1+8y)z\big]_{z=0}^{y+x^2}\,dy\,dx =$$

$$= \int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{2-x} (y+x^2+8y^2+8x^2y)\,dydx = \int\limits_{0}^{1}(4x^4-\frac{59}{3}x^3+\frac{69}{2}x^2+30x+\frac{70}{3})\,dx$$

$$= \frac{4}{5} - \frac{59}{12} + \frac{69}{6} + \frac{30}{2} + \frac{70}{3} = \frac{2743}{60} = 45.71\dot{6}$$

   Wichtig: da die Variable z von den anderen Variablen abhängt, muß sie im Integral als innerste Variable stehen. x ist von allen anderen Variablen unabhängig und steht somit im Integral ganz außen.

3. Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$I = \iint_O (x^2 - xy)\, dy\, dz + (1 - 3y + z)\, dz\, dx + (e^x - xz)\, dx\, dy$$

wobei O die Oberfläche des Würfels $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$ darstellt.

Lösung:
Die Komponenten des Integrals beinhalten (bereits richtig geordnet) die Komponenten des Vektorfeldes $\vec{V}$ (vgl. Definition des Oberflächen-integrals).

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} x^2 - xy \\ 1 - 3y + z \\ e^x - xz \end{pmatrix} \qquad \operatorname{div}(\vec{V}) = x - y - 3$$

Damit:

$$I = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1} \int_{z=0}^{1} (x - y - 3)\, dz\, dy\, dx = \ldots = -3$$